APPROCHE HISTORIQUE
DE LA FONCTION LOGARITHME

Objectifs :

- *Connaître le sens de variation, le signe, les limites, et la courbe représentative de la fonction ln.*
- *Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture.*
- *Calculer des limites de fonctions logarithmes.*
- *Résoudre des équations ou des inéquations contenant des logarithmes.*
- *Dériver des fonctions contenant des logarithmes.*

1. Activité : fini les calculs fastidieux

Les logarithmes népériens ont été mis en évidence par l'Écossais John Napier (1550 - 1617) dit Neper. Afin de faciliter le travail des astronomes, navigateurs de l'époque qui étaient confrontés à des calculs fastidieux, Neper établit une table à deux colonnes, appelée table de logarithmes.

Son principe est le suivant :
À la multiplication de deux nombres a et b de la première colonne correspond l'addition de deux nombres x et y de la seconde colonne.

a	x
b	y
ab	$x+y$

On donne ci-contre un extrait d'une table de logarithmes (les nombres de la colonne de droite sont des valeurs arrondies à 10^{-4} près).

1) a) Vérifier sur deux exemples que cette table vérifie bien le principe énoncé ci-dessus.

b) Quel nombre doit-on écrire en face de 10 ? de 14 ? de 16 ?

c) Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ?

d) Sans poser de multiplication, utiliser la table pour obtenir 39×94.

2) a) Quand on calcule le quotient de deux nombres de la colonne de gauche, à quelle opération cela correspond-il pour ceux de la colonne de droite ?

b) En déduire les nombres à inscrire en face de 13 ; $0,5$ et $0,1$.

3) Dans la colonne de gauche, $0,5$; 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; 16 sont en progression géométrique de raison 2. Quelle progression observe-t-on pour les nombres correspondants dans la colonne de droite ?

4) En déduire les nombres à inscrire en face de 2^{-5} et 2^{12}.

2^{-5}	
0,1	
0,5	
1	
2	0,6931
3	1,0986
4	1,3863
5	1,6094
6	1,7918
7	1,9459
8	2,0794
9	2,1972
10	
12	2,4849
13	
14	
15	2,7081
16	
39	3,6636
94	4,5433
3665	8,2066
3666	8,2069
3667	8,2071
2^{12}	

C'est vers 1614 que l'écossais John Napier, ou Néper en France, (1550-1617) invente les logarithmes qui portent son nom, sous une forme un peu différente de ce qui est fait dans ce chapitre.

(le terme provient, du grec *logos* = logique, raison et *arithmos* = nombre).

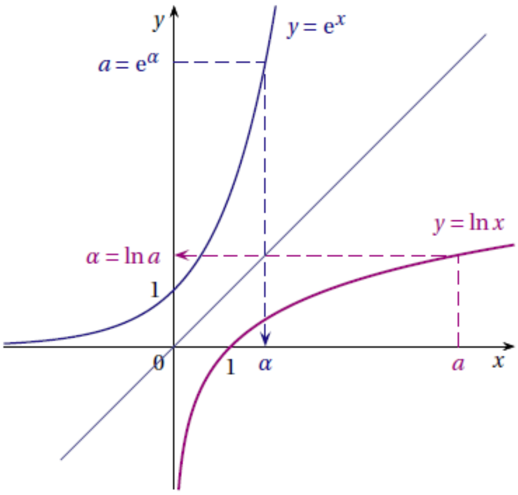
Son objectif était de simplifier les calculs trigonométriques de l'astronomie (trigonométrie sphérique) en remplaçant les multiplications et divisions par des additions et soustractions.

http://www.bibmath.net

2. Fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et pour tout réel x, $e^x \in]0\,;+\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a strictement positif, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution, c'est à dire que : pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel α tel que $e^\alpha = a$.
On définit une nouvelle fonction appelée logarithme népérien qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.
On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.



Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Définition 1. ***Fonction logarithme népérien***

On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On note cette solution $\ln(a)$.
La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction :

$$\ln : \begin{array}{l}]0\,;+\infty[\to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{array}.$$

comprendre la définition en vidéo

Exemple : L'équation $e^x = 2$ admet une unique solution. Il s'agit de $\ln(2)$.
A l'aide de la calculatrice, on peut obtenir une valeur approchée : $\ln(2) \approx 0,69$.

Conséquences : Comme $e^0 = 1$, alors $\ln(1) = 0$.
Comme $e^1 = e$, alors $\ln(e) = 1$.
Comme $e^{-1} = \frac{1}{e}$, alors $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

Propriété 1 (admise). ***Conséquences de la définition***

- **Pour tout réel a strictement positif, $e^x = a$ équivaut à $x = \ln(a)$.**
- **Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln(x)} = x$.**
- **Pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$.**

Exemples : $e^{\ln(4)} = 4$; $\ln(\sqrt{e}) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice ❶

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : a) $e^{5x-4} = 3$; b) $e^x(e^x - 6) = 0$; $\ln(x) = 5$.

méthodes en vidéo

3. Propriétés algébriques

Théorème. ***Relation fonctionnelle***

Pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Démonstration : $e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x)} \times e^{\ln(y)} = x \times y$ et $e^{\ln(x \times y)} = x \times y$. D'où $e^{\ln(x)+\ln(y)} = e^{\ln(x \times y)}$.
Par conséquent, $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.

Comme $e^{-1} = \frac{1}{e}$, alors $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$.

Propriétés 2 (admise). ***Corollaires de la relation fonctionnelle***

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$;

$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = -\ln(x) - \ln(y)$; $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln(x)$; pour tout entier n relatif, $\ln(x^n) = n\ln(x)$.

Démonstrations : • $\ln\left(\frac{1}{x}\right)+\ln(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\times x\right)=\ln(1)=0$; d'où $\ln\left(\frac{1}{x}\right)=-\ln(x)$.

• $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln\left(x\times\frac{1}{y}\right)=\ln(x)+\ln\left(\frac{1}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$.

• $\ln(x)=\ln\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)=\ln\left(\sqrt{x}\right)+\ln\left(\sqrt{x}\right)=2\ln\left(\sqrt{x}\right)$.

Exemples : $\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$; $\ln\left(\frac{3}{2}\right)=\ln(3)-\ln(2)$; $\ln\left(\sqrt{7}\right)=\frac{1}{2}\ln(7)$ et $\ln(8)=\ln\left(2^3\right)=3\ln(2)$.

Exercice ❷

Simplifier les expressions suivantes : $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)+\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$, $\ln\left(\frac{3}{16}\right)$ et $\ln\left(e^3\right)-\ln\left(\frac{3}{e}\right)$.

correction en vidéo

Exercice ❸

Simplifier les réels suivants : $A=e^{\ln(3)+1}$; $B=e^{-\ln(2)+\ln(3)}$; $C=\ln\left(\frac{e^5}{e^3}\right)$;

$D=\ln\left(\sqrt{e}\right)-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$; $E=2\ln(7)-\ln\left(\frac{49}{e^3}\right)$ et $F=\ln\left(3+\sqrt{2}\right)+\ln\left(3-\sqrt{2}\right)$.

4. Étude de la fonction logarithme népérien

Propriété 3. *Continuité et dérivabilité*

La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif, $\ln'(x)=\frac{1}{x}$.

Démonstration : La continuité est admise.
Soient a et x deux réels strictement positifs.

Le taux de variation de la fonction ln en a est $\frac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a}$, soit $\frac{X-\ln(a)}{e^X-a}$ en posant $X=\ln(x)$. Comme $a=e^{\ln(a)}$, alors $\frac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a}=\frac{X-\ln(a)}{e^X-e^{\ln(a)}}=\frac{1}{\frac{e^X-e^{\ln(a)}}{X-\ln(a)}}$.

Comme la fonction ln est continue en a, alors $\lim\limits_{x\to a}\ln(x)=\ln(a)$.

De plus, la fonction exponentielle est dérivable sur **R**, alors

$$\lim_{X\to\ln(a)}\frac{e^X-e^{\ln(a)}}{X-\ln(a)}=\exp'\left(\ln(a)\right)=\exp\left(\ln(a)\right)=e^{\ln(a)}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln(x)-\ln(a)}{x-a}=\frac{1}{e^{\ln(a)}}=\frac{1}{a}$.

Par conséquent, la fonction ln est dérivable en a, et $\ln'(a) = \frac{1}{a}$.

Exercice ❹

Soit la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3 - x + 2\ln(x)$. Étudier les variations de f.

correction en vidéo

Propriété 4. *Sens de variation*

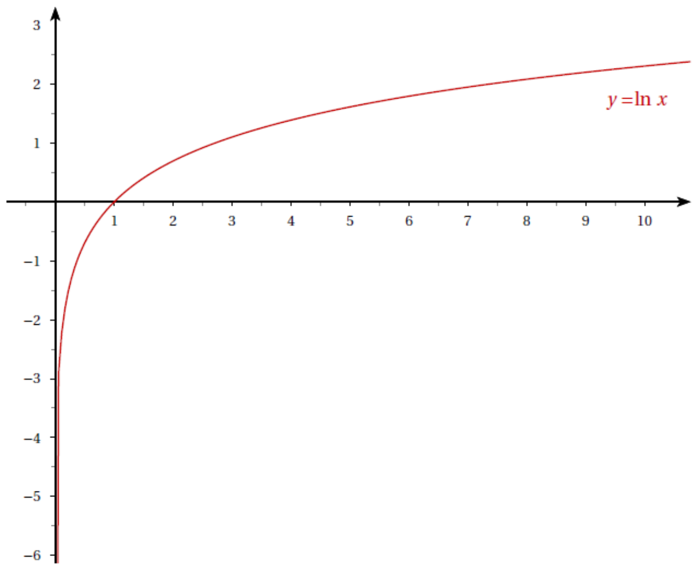
La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration : Comme $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et que $\frac{1}{x} > 0$ pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, alors la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

Propriété 5. *Convexité*

La fonction logarithme népérien est concave sur $]0\,;+\infty[$.

Démonstration : Comme $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, alors $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$. D'où pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $\ln''(x) < 0$. On en déduit que la fonction ln est concave sur $]0\,;+\infty[$.



Propriété 6. *Limites*

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$$

Propriété 7. ***Résolution d'équation et d'inéquation***

Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

- **$\ln(x)=\ln(y)$ équivaut à $x=y$**
- **$\ln(x)<\ln(y)$ $\ln(x)=\ln(y)$ équivaut à $x<y$**

Méthode pour résoudre une équation

[méthode en vidéo]

Méthode pour résoudre une inéquation

[méthodes en vidéo]

Exercice ❺

Résoudre dans $]0\,;+\infty[$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln(x+4)=\ln(4x+5)$; b) $\ln(x+2)\leq\ln(2x+1)$; c) $\ln(3x)-2\ln(x)<5$.

Exercice ❻

Déterminer le plus petit entier naturel n tels que : a) $2^n\geq100$; b) $\left(\frac{1}{3}\right)^n\leq10^{-3}$.

Exercice ❼

Comparer sans calculatrice : a) $\ln(5)$ et $\ln(2)+\ln(3)$; b) $2\ln(3)$ et $3\ln(2)$.

Exercice ❽

Un groupe industriel s'engage à réduire ses émissions de polluants de 4 % par an.
En 2015, la masse de polluants émise dans l'atmosphère était de 50 000 tonnes.

1) Pour tout entier naturel n, on note u_n la masse, exprimée en tonnes, de polluants émise dans l'atmosphère pour l'année $(2015+n)$. Exprimer u_n en fonction de n.

2) À partir de quelle année, la masse de polluants émise dans l'atmosphère par ce groupe industriel aura diminué d'au moins 40 % ?

Exercice ❾

La renouée du Japon est une plante à croissance très rapide et très invasive.
Un jardinier souhaite faire disparaître de son terrain cette espèce qui occupe une superficie de 120 m^2 au 1er janvier 2017. Pour cela, chaque année au printemps, il procède à un arrachage qui permet de réduire de 10 % la superficie de terrain envahi l'année précédente. Cependant, cette espèce de plante ayant une puissance de dissémination très importante, de nouvelles pousses apparaissent chaque été et envahissent une nouvelle parcelle de terrain d'une superficie de 4 m^2.

1) Déterminer la superficie de terrain envahi par cette plante au 1er janvier 2018.

On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente la superficie de terrain en m^2 envahi par la renouée du Japon au 1er janvier de l'année $(2017+n)$.

La suite (u_n) est donc définie par $u_0=120$ et, pour tout entier naturel n, par $u_{n+1}=0{,}9u_n+4$.

2) Le jardinier souhaite connaître l'année à partir de laquelle il aura réduit au moins de moitié la superficie de terrain envahi par rapport au 1^er^ janvier de l'année 2017.
Recopier et compléter l'algorithme suivant afin qu'il détermine l'année souhaitée.
On ne demande pas de faire fonctionner l'algorithme.

```
U ← ……
N ← 0
Tant que ……………………………
U ← ……
N ← N +1
Fin tant que
```

3) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 40$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$ et préciser le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

c) Justifier que $u_n = 80 \times 0{,}9^n + 40$ pour tout entier naturel n.

4) a) Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $80 \times 0{,}9^n + 40 \leq 60$.

b) En déduire l'année à partir de laquelle la superficie envahie par la plante sera réduite au moins de moitié par rapport au 1er janvier de l'année 2017.

5) Le jardinier arrivera-t-il à faire disparaître complètement la plante de son terrain ? Justifier la réponse.

5. Fonction ln u

Propriété 3. ***Continuité et dérivabilité***

Soit u une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I.

La fonction $\ln(u)$ est dérivable sur I et $\ln'(u) = \frac{u'}{u}$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]-2\ ;\ 3[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{x+2}\right)$.

On a $f = \ln u$ avec $u(x) = \frac{3-x}{x+2}$.

La fonction u est dérivable sur $]-2\ ;\ 3[$, et $u'(x) = \frac{-(x+2)-(3-x)\times 1}{(x+2)^2} = \frac{-5}{(x+2)^2}$.

Donc f est dérivable sur $]-2\ ;\ 3[$, et, pour tout réel x de $]-2\ ;\ 3[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{-5}{(x+2)^2}}{\frac{3-x}{x+2}} = \frac{-5}{(x+2)^2} \times \frac{x+2}{3-x} = \frac{-5}{(x+2)(3-x)}.$$

Remarque : Comme u est strictement positive sur I, alors le signe de $(\ln u)'$ est le même que celui de u'. Donc la fonction $\ln u$ a les mêmes variations que celles de la fonction u.