RÉPÉTITION D'EXPÉRIENCES INDÉPENDANTES, ÉCHANTILLONNAGE, LOI DE PROBABILITÉS DISCRÈTES

Objectifs :

- *Identifier des situations où une variable aléatoire suit une loi de Bernoulli, une loi binomiale ou une loi géométrique.*
- *Déterminer des coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal.*
- *Dans le cas où X suit une loi binomiale, calculer à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, les probabilités des événements de type P(X = k) ou P(X $\leqslant$ k), etc..*
- *Calculer explicitement ces probabilités pour une variable aléatoire suivant une loi géométrique.*
- *Dans le cas où X suit une loi binomiale, déterminer un intervalle I pour lequel la probabilité P(X $\in$ I) est inférieure à une valeur donnée α, ou supérieure à 1 - α.*
- *Dans le cadre de la résolution de problème, utiliser l'espérance des lois précédentes.*
- *Utiliser en situation la caractérisation d'une loi géométrique par l'absence de mémoire.*
- *Calculer des probabilités dans des situations faisant intervenir des probabilités conditionnelles, des répétitions d'expériences aléatoires.*

1. Loi uniforme discrète

Activité ❶

Les élections dans la Venise médiévale et de la renaissance, y compris celle du Doge de Venise, se faisait souvent par un tirage d'urne en utilisant des boules de couleur. Supposons qu'une urne contient 5 boules numérotées de 1 à 5 ; les boules sont indiscernables au toucher.

Alors $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=P(X=5)=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$.

Définition 1. ***Loi uniforme***

On dit que X suit une loi uniforme discrète de paramètre n sur l'ensemble {1,...,n} si pour tout entier k de {1,...,n}, on a : $P(X=k)=\frac{1}{n}$.

Reprenons l'activité précédente. Calculer l'espérance, $E(X)$, de la variable aléatoire X.

$$E(X)=1\times\frac{1}{5}+2\times\frac{1}{5}+3\times\frac{1}{5}+4\times\frac{1}{5}+5\times\frac{1}{5}=\frac{1+2+3+4+5}{5}=3.$$

Propriété 1. *Espérance d'une loi uniforme*

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme de paramètre n, alors on a : $E(X)=\frac{n+1}{2}$.

Démonstration :

$E(X)=......\times......+......\times......+......\times......+...+.....\times......=(......+......+......+...+.....)\times......$

Or $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$; d'où $E(X)=\frac{............}{......}\times......=\frac{...........}{......}$.

2. Épreuve de Bernoulli – Loi de Bernoulli

Jacques ou Jakob Bernoulli (1654 - 1705) est un mathématicien et physicien suisse.
Il fut un des premiers à comprendre et à appliquer le calcul différentiel et intégral, proposé par Leibniz, découvrit les propriétés des nombres dits depuis *nombres de Bernoulli* et donna la solution de problèmes regardés jusque-là comme insolubles.
Dans *Ars Conjectandi* (1713), Jacques Bernoulli considère le problème de calcul, connaissant le nombre de cailloux tirés d'une urne, de la proportion des différents cailloux colorés de l'urne. Ce problème est connu comme le problème de probabilité inverse, et a été un sujet de recherche au XVIIIe siècle qui a attiré l'attention de Abraham de Moivre et de Thomas Bayes.

Définition 2. *Épreuve de Bernoulli*

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; on nomme l'une de ces issues « succès », que l'on note S, et l'autre « échec », que l'on note $\overline{S}$.

Exemple : On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six".

Définition 3. *Loi de Bernoulli*

Soit p un nombre réel de $[0;1]$. On dit que la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :

- **X prend pour seules valeurs 1 (« succès ») et 0 (« échec ») ;**
- **$P(X=1)=p$ et $P(X=0)=1-p$.**

Exemple : Reprenons l'exemple du dé précédent.

x_i	0	1
$P(X=x_i)$	$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$	$\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

Propriété 2. ***Espérance et écart-type d'une loi de Bernoulli***

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de Bernoulli de paramètre p

$E(X)=p$ et $\sigma(X)=\sqrt{p(1-p)}$.

Démonstrations : $E(X)=1\times P(X=1)+0\times P(X=0)=1\times p+0\times(1-p)=p$.

$$V(X)=(1-E(X))^2\times P(X=1)+(0-E(X))^2\times P(X=0)=(1-p)^2\times p+(0-p)^2\times(1-p)$$
$$=(1-2p+p^2)\times p+p^2\times(1-p)=p-2p^2+p^3+p^2-p^3=p-p^2=p(1-p)$$

Par suite, $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{p(1-p)}$.

3. Schéma de Bernoulli

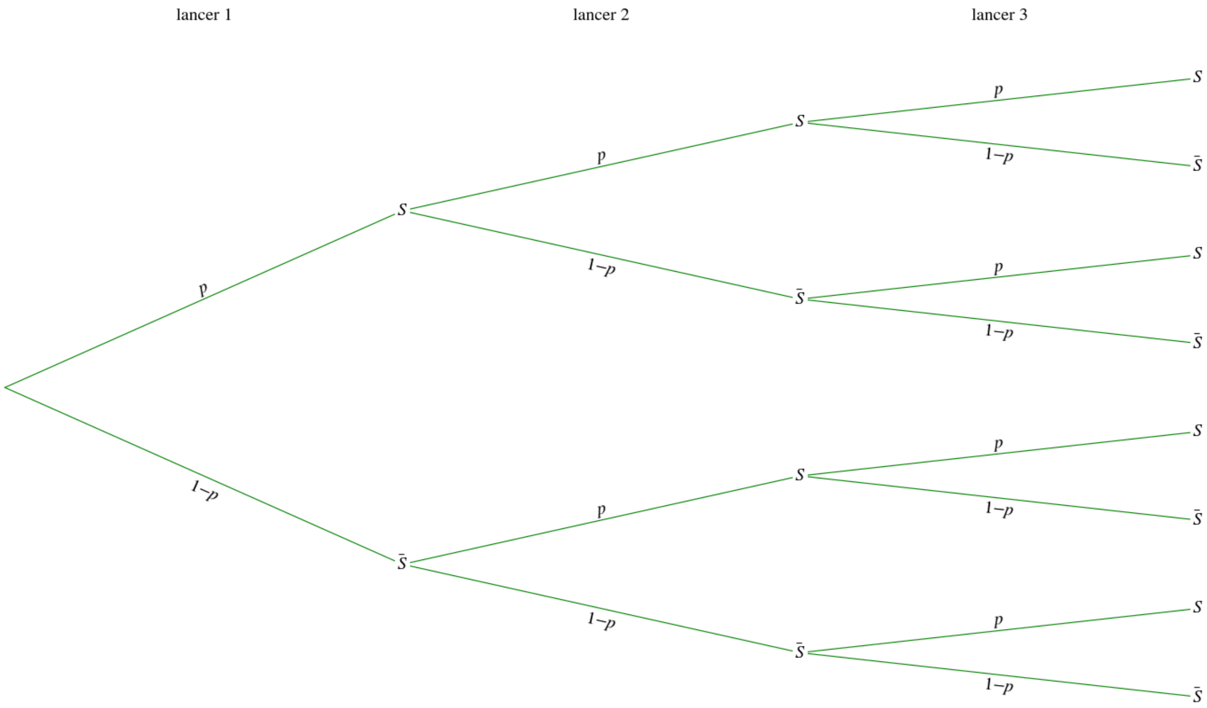
Définition 4. Schéma de Bernoulli

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$. On appelle schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p toute expérience aléatoire qui consiste en la répétition de n épreuves de Bernoulli (de paramètre p) identiques et indépendantes.

Exemple : Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer trois fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse au nombre d'apparitions du numéro 6 au terme de ces trois lancers.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli de paramètres $n=3$ et $p=\frac{1}{6}$.

En effet, on répète trois fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p=\frac{1}{6}$, égale à la probabilité d'obtention du chiffre 6 lors d'un lancer du dé.



On obtient par exemple : $p(S,S,S) = p^3 = \left(\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}\right)^3 = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

On remarque qu'il y a trois chemins conduisant à deux succès, c'est-à-dire aux issues $(S,S,\overline{S})$, $(S,\overline{S},S)$ et $(\overline{S},S,S)$. Par symétrie, il y a aussi trois chemins menant à deux échecs, c'est-à-dire aux issues $(S,\overline{S},\overline{S})$, $(\overline{S},\overline{S},S)$ et $(\overline{S},S,\overline{S})$.

On peut ainsi formuler qu'il y a autant de chemins conduisant à k succès qu'à k échecs, où k est un entier compris entre 0 et 3.

calculer une probabilité à l'aide d'un arbre

4. Coefficients binomiaux et triangle de Pascal

Définition 5. Coefficient binomial

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. Considérons un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p.

Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.

On appelle coefficient binomial, que l'on note $\binom{n}{k}$, le nombre de chemins conduisant à k succès pour n répétitions sur l'arbre probabiliste représentant le schéma de Bernoulli.

Le nombre $\binom{n}{k}$ se lit « k parmi n ».

Remarque : Le nombre $\binom{n}{k}$ s'appelle aussi nombre de combinaisons de k éléments pris parmi n.

cours en vidéo

Propriété 3. Schéma de Bernoulli

Soit n et k des entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$.

$$\binom{n}{0}=1 \quad ; \quad \binom{n}{n}=1 \quad ; \quad \binom{n}{1}=n \quad ; \quad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Démonstrations : • $\binom{n}{0}$ est le nombre de chemins du schéma de Bernoulli conduisant à 0 succès, donc à n échecs. Il n'y en a qu'un seul : $(\overline{S},\overline{S},...,\overline{S})$. Ainsi, on a bien $\binom{n}{0}=1$.

• $\binom{n}{n}$ est le nombre de chemins du schéma de Bernoulli conduisant à n succès. Il n'y en a qu'un seul : $(S,S,...,S)$. Ainsi, on a bien $\binom{n}{n}=1$.

• $\binom{n}{1}$ est le nombre de chemins du schéma de Bernoulli conduisant à 1 succès. Il y en a n qui correspondent aux n places possibles pour l'unique succès. Ainsi, on a bien $\binom{n}{1}=n$.

• $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins conduisant à k succès. Il y a alors $n-k$ échecs. Mais, il y a autant de chemins qui réalisent k succès que de chemins qui réalisent k échecs, c'est-à-dire $n-k$ succès. Or $\binom{n}{n-k}$ est le nombre de chemins conduisant à $n-k$ succès.

Par conséquent, $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

Exercice ❶ : *Calculer $\binom{25}{24}$ sans calculatrice.*

$$\binom{25}{24}=\binom{25}{25-1}=\binom{25}{1}=25.$$

corrigé en vidéo

Remarques :

Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit : $=\mathrm{COMBIN}(25;24)$

Pour calculer $\binom{25}{24}$, on saisit : $25\mathbf{combinaison}24$ ou $25\mathbf{nCr}24$ suivant le modèle de calculatrice.

Propriété 4. ***Formule de Pascal***

Pour tous entiers naturels n et k tels que $0 \leq k \leq n-1$: $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$..

Démonstration : Soit n un entier naturel non nul et soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n-1$
Réalisons $n+1$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. Le nombre de chemins conduisant à $k+1$ succès pour ces $n+1$ répétitions est égal à $\binom{n+1}{k+1}$.

Parmi ces chemins, il y en a de deux catégories disjointes :

● ceux qui commencent par un succès : l'arbre représentant les épreuves suivantes (de la deuxième à la dernière) est alors un arbre de n épreuves, où il reste à choisir k succès : il y a donc $\binom{n}{k}$ chemins possibles de cette catégorie.

● ceux qui commencent par un échec : l'arbre représentant les épreuves suivantes (de la deuxième à la dernière) est alors un arbre de n épreuves, où il reste à choisir $k+1$ succès : il y a donc $\binom{n}{k+1}$ chemins possibles de cette catégorie.

Ces catégories étant disjointes, on peut conclure que $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}$ chemins donnent $k+1$ succès en $n+1$ répétitions.

Par conséquent, $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$.

Source : wikipédia

Blaise Pascal (1623 -1662) est un mathématicien, physicien, inventeur, philosophe, moraliste et théologien français.
Les premiers travaux de Pascal concernent les sciences naturelles et appliquées. Il contribue de manière importante à l'étude des fluides. Il a clarifié les concepts de pression et de vide, en étendant le travail de Torricelli. Pascal a écrit des textes importants sur la méthode scientifique.
En 1641, il invente la première machine à calculer et après trois ans de développement et 50 prototypes, il la présente à ses contemporains en la dédiant au chancelier Séguier. Dénommée *machine d'arithmétique*, puis roue pascaline et enfin pascaline, il en construisit une vingtaine d'exemplaires dans la décennie suivante.
Mathématicien de premier ordre, il crée deux nouveaux champs de recherche majeurs : tout d'abord il publie un traité de géométrie projective à seize ans ; ensuite il développe en 1654 une méthode de résolution du « problème des partis » qui, donnant naissance au cours du XVIII[e] siècle au calcul des probabilités, influencera fortement les théories économiques modernes et les sciences sociales.

Exercice ❷ : *Calculer* $\binom{4}{2}$ *sans calculatrice.*

$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + \binom{2}{1} + \binom{2}{2} = 3 + 2 + 1 = 6$.

[corrigé en vidéo]

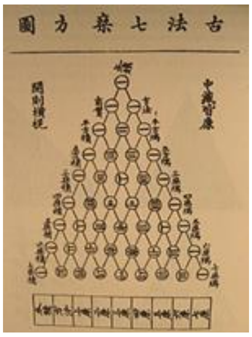
Le tableau qui suit se complète de proche en proche comme combinaisons répondant à la formule de Pascal.
Le triangle de Pascal [est utilisé pour déterminer rapidement les coefficients binomiaux].

n \ k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

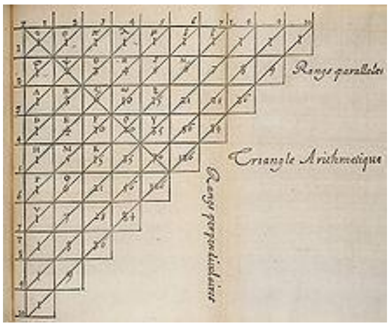
La ligne 2 contient $\binom{1}{0} = 1$ et $\binom{1}{1} = 1$.

En appliquant la propriété $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$, on obtient de proche en proche les nombres sur les lignes suivantes.

Ainsi, on a : $\binom{4}{2} = \binom{3}{2} + \binom{3}{1}$; d'où on obtient le 6 de la ligne 4 en ajoutant deux nombres de la ligne 3 et ainsi de suite de proche en proche.



Cet algorithme de calcul est présent en Chine au XIVe siècle, mais Pascal a systématisé son étude et montré toutes ses ressources.



Le tableau est appelé triangle de Pascal en hommage à ce dernier qui écrivit en 1654 son "traité du triangle arithmétique" dans lequel il expose d'innombrables applications du triangle déjà connu de Tartaglia (1556), Stifel (1543) et des Chinois (1303).

[Le triangle de Pascal] vu sur le site de Thérèse Eveillau

Exemple de programmation du triangle de Pascal en langage python :

```
def trianglePascal(n):
    L=[1]
    L=L+[0 for k in range(n)]
    t=[L]
    for k in range(1,n+1):
        L=[1]
        for l in range (1,k+1):
            L.append(t [k-1][l]+t [k-1][l-1])
        L=L+[0 for l in range(k,n)]
        t=t+[L]
     return t
```

autre programme en vidéo

5. Loi binomiale

Définition 6. ***Loi binomiale***

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. Considérons un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p.
Soit k un entier naturel tel que $0 \leq k \leq n$.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre total de succès.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p. On la note $\mathscr{B}(n\ ;\ p)$.

Exemple : Reprenons l'ensemble du **3**.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'apparitions du numéro 6 au terme de ces trois lancers. Alors X suit la loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}\left(3\ ;\ \frac{1}{6}\right)$.

Méthode pour calculer une probabilité avec une loi binomiale à l'aide de la calculatrice T.I.

méthode en vidéo

Exercice ❸ : On lance 7 fois de suite un dé à 6 faces.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que le dé affiche un nombre supérieur ou égal à 3.
a) Quelle est la loi suivie par X ?
b) Calculer la probabilité $P(X=5)$.
c) Calculer la probabilité $P(X \leq 5)$.
d) Calculer la probabilité $P(X \geq 3)$.

Propriété 5. *Calculer une probabilité avec une loi binomiale*

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. Si X suit une loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(n\,;\,p)$, alors pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, la probabilité que X soit égale à k est :

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Démonstration : On sait que tous les chemins comportant k succès sont équiprobables car, en faisant le produit des probabilités des n issues de chaque épreuve de Bernoulli, on obtient k facteurs égaux à p (ce sont les k succès) et $n-k$ facteurs égaux à $1-p$ (les $n-k$ échecs). Leur probabilité est donc égale à $p^k(1-p)^{n-k}$.

De plus, il y a $\binom{n}{k}$ chemins menant à k succès. Par conséquent, $p(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

Exemple : Reprenons l'exemple du **3.**. La probabilité d'obtenir deux chiffres 6 sur les trois lancers est égale à $p(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(1-\frac{1}{6}\right)^{3-2}=3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}=\frac{15}{216}$.

Exercice ❹ : Une urne contient 5 boules gagnantes et 7 boules perdantes. Une expérience consiste à tirer au hasard 4 fois de suite une boule et de la remettre.
On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de tirages gagnants.

1) Prouver que X suit une loi binomiale.
2) Déterminer la loi de probabilité de X.
3) Calculer la probabilité d'obtenir 3 boules gagnantes.

corrigé en vidéo

Propriété 6. *Espérance et écart-type d'une loi binomiale*

Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. Si X suit une loi binomiale de paramètres $\mathscr{B}(n\,;\,p)$, alors $E(X)=np$ et $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

Exemple : Reprenons l'exemple du **3.**.

$$E(X)=np=3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\ ;\ V(X)=np(1-p)=3\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{5}{12}\ \text{ et }\ \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{5}{12}}\approx 0{,}65.$$

Remarque : On peut remarquer que la formule de l'espérance peut s'expliquer sans calcul. En effet, chaque épreuve de Bernoulli a une espérance de succès égale à p donc, en la répétant n fois, on peut espérer obtenir en moyenne $n\times p$ succès.

Méthode pour calculer l'espérance mathématique d'une loi binomiale

méthode en vidéo

Méthode pour calculer l'espérance mathématique d'une loi binomiale

méthode en vidéo

Exercice ❺ : Une entreprise produit des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise, 8 stylos.

1) Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de stylos présentant un défaut.
Quelle est la loi suivie par X ?

2) Calculer la probabilité des événements suivants (arrondir les résultats au millième) :
   a) A : « Il y a exactement deux stylos avec un défaut »
   b) B : « Il y a au moins un stylo avec un défaut ».

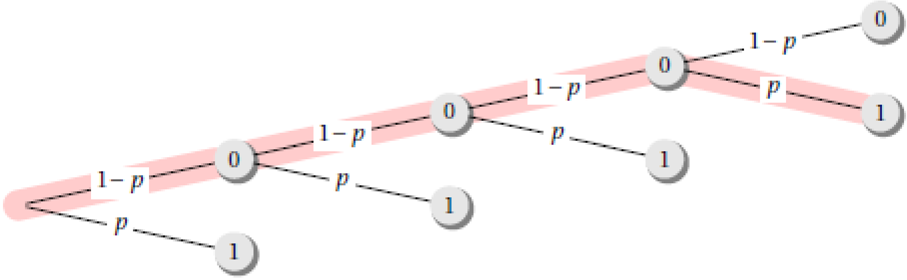
3) Quel nombre de stylos présentant en moyenne un défaut, l'entreprise peut-elle espérer obtenir ?

6. Loi géométrique

Définition 7. ***Loi géométrique***

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p lorsqu'elle donne le nombre d'expériences de Bernoulli de paramètre p répétées indépendamment nécessaires pour obtenir un premier succès.
On la note $\mathrm{G}(p)$.

Voici une représentation pour $X = 4$:



Propriété 7. ***Loi géométrique***

Soit X la variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p.
Pour tout entier naturel k non nul, la loi de probabilité de X est : $P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}$.

Exemple : On lance une pièce de monnaie et on s'arrête dès qu'on obtient « pile », que l'on considère comme succès.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre d'essais nécessaires jusqu'au premier succès.
La probabilité d'obtenir pour la première fois « pile » au troisième lancer est égale à :
$P(X=3)=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$.

Propriété 8. ***Espérance et écart-type d'une loi géométrique***

Soit p un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$ Si X suit une loi géométrique de paramètre p, alors $E(X)=\frac{1}{p}$.

Exercice ❻ : Le « 4 » est un jeu qui se joue avec un dé. Dans la règle, il est écrit qu'on peut jouer continuellement en lançant le dé mais dès l'obtention d'un « 4 », le joueur n'a plus le droit de relancer le dé.
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers de dés nécessaires jusqu'à l'obtention d'un « 4 ».
1) Calculer $P(X=3)$, $P(X\leq 3)$ et $P(X\leq 8)$.
2) Calculer $E(X)$. Interpréter ce résultat.
3) A l'aide du tableur, représenter graphiquement les probabilités $P(X=k)$ pour k compris entre 1 et 20.

corrigé en vidéo

Propriété 9. ***Loi géométrique sans mémoire***

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p, alors pour tous entiers naturels m et n non nuls, on a : $P_{X\geq m}(X\geq m+n)=P(X\geq n)$

Exercice ❼ : On considère que la probabilité qu'un couple donne naissance à un enfant gaucher est égale à 12 %.
Sachant qu'un couple a déjà un enfant droitier, quelle est la probabilité d'avoir un enfant gaucher à partir du 4^{e} enfant ?

corrigé en vidéo