LIMITES DE FONCTIONS

Objectifs :

• *Déterminer les limites des fonctions de référence (carré, cube, racine carrée, inverse, exponentielle).*
• *Déterminer une limite d'une fonction.*

1. Limite finie d'une fonction à l'infini

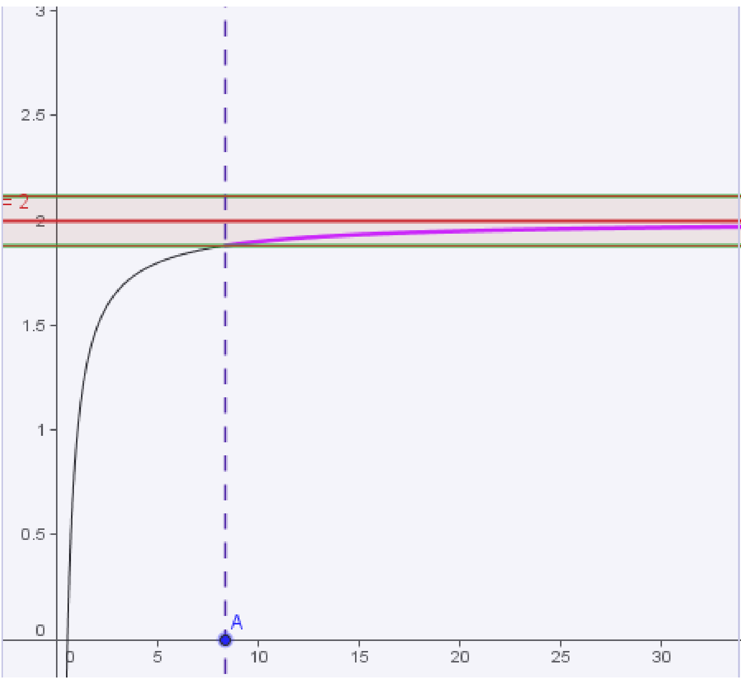
Définition 1. ***Limite finie en*** $+\infty$

On dit que la fonction f admet pour limite ℓ en $+\infty$ lorsque $f(x)$ se rapproche de ℓ dès que x est suffisamment grand.
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

[limite finie d'une fonction à l'infini]

Exemple : Soit f la fonction définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$.

Les valeurs $f(x)$ se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand.
On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$.



D'où la droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$

Définition 2. ***Limite finie en*** $-\infty$

On dit que la fonction f admet pour limite ℓ en $-\infty$ lorsque $f(x)$ se rapproche de ℓ dès que x est suffisamment grand en valeur absolue.
On note : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.
On dit alors que la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$ en $-\infty$.

Propriété 1. **Limites de fonctions de référence**

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

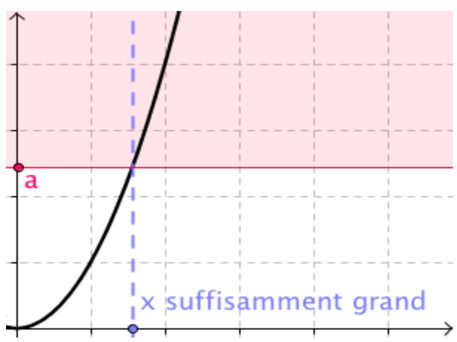
2. Limite infinie d'une fonction à l'infini

Définition 3. ***Limite infinie en*** $+\infty$

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.
On note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

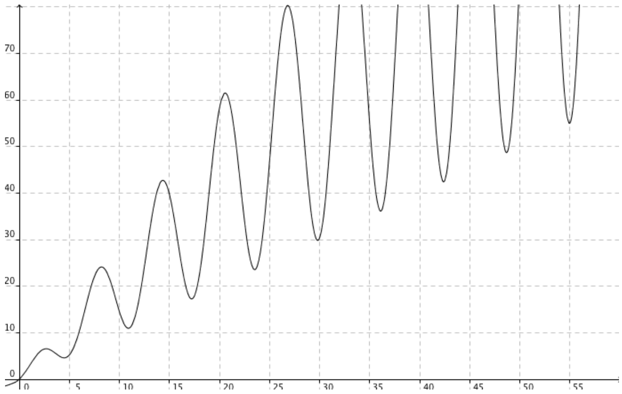
[limite infinie d'une fonction à l'infini]

Exemple : La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.



Remarques : • On peut faire des définitions équivalentes pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et pour $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

● Limites et monotonie ne sont, en général, pas liées.



On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Pourtant cette fonction n'est pas croissante.

Propriété 2. Limites de fonctions de référence

Soit n un entier naturel non nul, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est impair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$.

Si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax+b) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (ax+b) = -\infty$

Si $a < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax+b) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (ax+b) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

3. Limite d'une fonction en un réel a

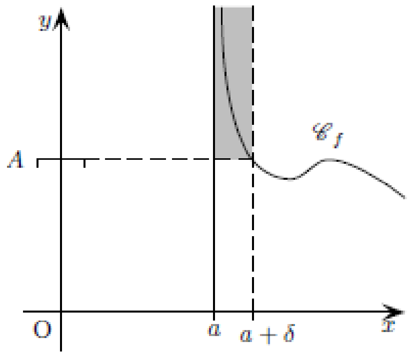
Définition 4. *Limite infinie en $+\infty$*

On dit que f a pour limite $+\infty$ en a lorsque $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de a.

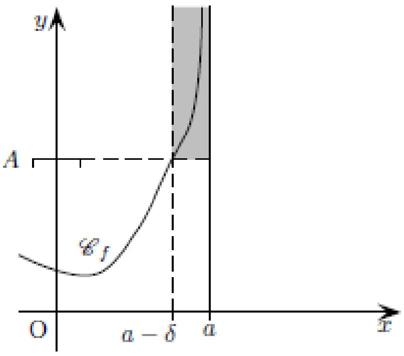
On note : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

On dit alors que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale de $\mathscr{C}_f$.

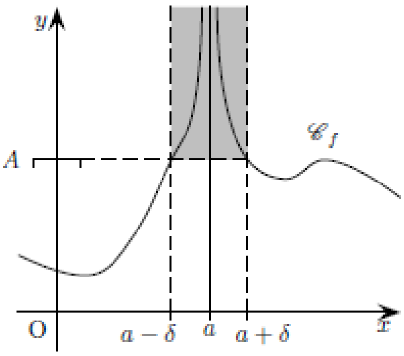
[limite d'une fonction en un réel a]



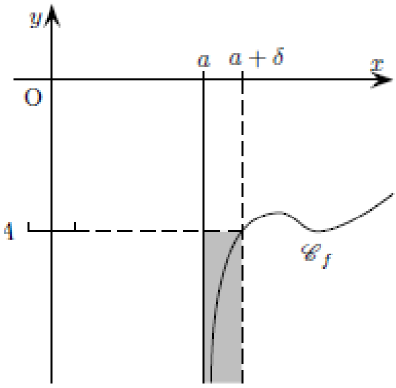
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$



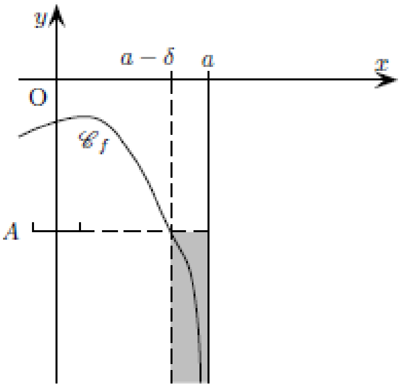
$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$



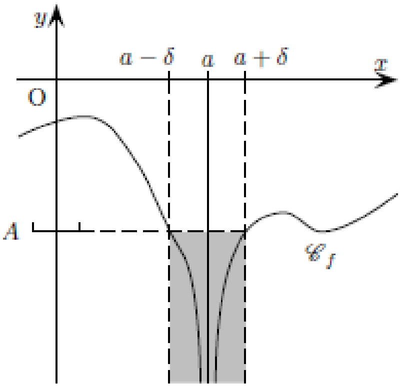
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$

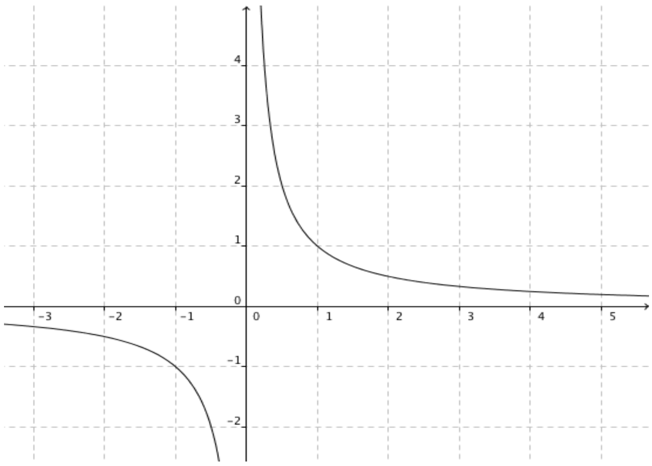


$\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



On obtient :

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

On parle de ***limite à gauche*** de 0 et de ***limite à droite*** de 0.

Propriété 3. Limites de fonctions de référence

♦ **Soit n un entier naturel non nul :**

- si n est pair, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

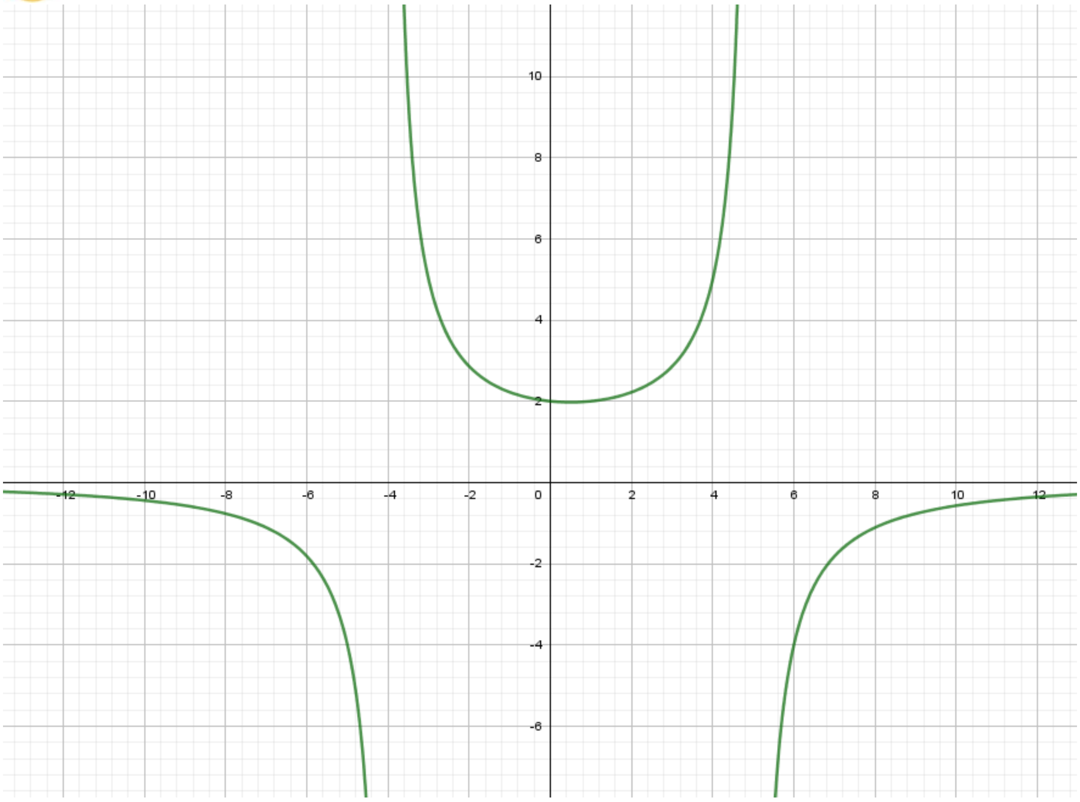
- si n est impair, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ **et** $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$

♦ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

Exercice ❶ : Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;-4[\,\cup\,]-4\,;5[\,\cup\,]5\,;+\infty[$ et représentée graphiquement par la courbe ci-dessous.

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ x<-4}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to -4 \\ x>-4}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x>5}} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

corrigé en vidéo



4. Opérations sur les limites

Soit f et g admettant chacune une limite, finie ou non, quand x tend vers a.
Dans ces énoncés, a peut être remplacé par $+\infty$ ou $-\infty$, mais ℓ et ℓ' sont des réels.
Lorsqu'il n'y a pas de théorème général permettant de conclure et qu'il faut utiliser d'autres démarches, on dit qu'on a une forme indéterminée, souvent notée **F.I.**
Ces cas nécessiteront une étude particulière chaque fois qu'ils se présenteront.

1) Limite de la somme $f+g$ des fonctions f et g

Si	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Exemple : *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)$.

On a $f=g+h$ avec $g(x)=\sqrt{x}$ et $h(x)=-\dfrac{2}{x^2}$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$, donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=+\infty$ (par somme de limites).

2) Limite du produit $f\times g$ des fonctions f et g

Il faut penser à appliquer la règle de signe d'un produit, qui s'applique aux limites « infinies ».

Si	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$
	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
alors	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)=$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Si	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=$	$+\infty$	$-\infty$	0
	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors	$\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)\times g(x)\right)=$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Exemples : • *Déterminer* $\lim\limits_{x\to0}(x+2)\sqrt{x}$.

On a $f=g\times h$ avec $g(x)=x+2$ et $h(x)=\sqrt{x}$.

Or $\lim\limits_{x\to0}(x+2)=2$ et $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}=0$, donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to0}(x+2)\sqrt{x}=0}$ (par produit de limites).

• *Déterminer* $\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-x)$.

On a $f=g\times h$ avec $g(x)=x$ et $h(x)=1-x$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-x=-\infty$ donc $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-x)}=-\infty$ (par produit de limites)

3) Limite du quotient $\frac{f}{g}$ des fonctions f et g

• **Cas où la limite de g n'est pas nulle** :

Si	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors	$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

• **Cas où la limite de g est nulle** :

Si	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
	$\lim\limits_{x\to a} g(x)=$	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
alors	$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**

Remarque : « 0 en restant négative ou positive » signifie que g garde un signe constant au voisinage de a, en $+\infty$ ou en $-\infty$ suivant les cas.

Exemple : *Déterminer* $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{x-2}{\sqrt{x}}$.

On a : $f=\frac{g}{h}$ avec $g(x)=x-2$ et $h(x)=\sqrt{x}$.

Or $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x-2)=-2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{x}=0$ (en restant positive), donc $\mathbf{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(\frac{x-2}{\sqrt{x}}\right)=-\infty}$.

Exercice ❷ : Soit la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 2[\cup]2\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\frac{3x+1}{2-x}$.

Montrer que la droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

corrigé en vidéo

Exercice ❸ : Soit la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 4[\cup]4\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\frac{2x}{x-4}$.

Montrer que la droite d'équation $x=4$ est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

corrigé en vidéo

5. Limite d'une fonction composée

Méthode pour déterminer la limite d'une fonction composée

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-\frac{1}{x}}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 1$ (par somme de limites)

Par suite, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to 1} e^{X} = e^{1} = e$.

corrigé en vidéo