ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Objectifs :

- *Vérifier qu'une fonction donnée est solution d'une équation différentielle.*
- *Déterminer les primitives d'une fonction, en reconnaissant la dérivée d'une fonction de référence ou une fonction de la forme $2\,u\,u'$, $e^u\,u'$ ou u'/u.*
- *Résoudre une équation différentielle $y' = a\,y$. Pour une équation différentielle $y' = a\,y + b$: déterminer une solution particulière constante ; utiliser cette solution pour déterminer la solution générale.*

1. Équations différentielle et primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition 1. *Équation différentielle*

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur un intervalle $\mathbf{I}$ et qui fait intervenir sa fonction dérivée et (ou) sa fonction dérivée seconde.

Exemple : L'équation d'inconnue y, $y'(t) = 3t^2$ pour tout t de $\mathbb{R}$ est une équation différentielle. La fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = t^3$ pour tout t de $\mathbb{R}$ en est une solution.

Définition 2. *Primitive d'une fonction*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $\mathbf{I}$. Une fonction F dérivable sur un intervalle $\mathbf{I}$ et de dérivée $F' = f$ est appelée primitive de f sur $\mathbf{I}$. C'est une solution à l'équation différentielle d'inconnue y, $y' = f$.

Exemple : Soit les fonctions f et g définies respectivement par $f(x) = 2x + 1$ et $g(x) = x^2 + x + 5$. On remarque que, pour tout réel x, $g'(x) = f(x)$.
Donc g est une primitive de f sur **R**.

2. Propriétés des primitives

Propriété 1. Primitives d'une fonction

Si F est une primitive de f sur un intervalle $\mathbf{I}$, alors toute primitive de f sur $\mathbf{I}$ est de la forme $F + C$ où C est une fonction constante sur $\mathbf{I}$.

Démonstration : Réciproquement, si F et G sont deux primitives de f sur I, considérons la fonction $G-F$ dérivable sur I. Elle vérifie, pour tout élément x de I :

$(G-F)'(x)=(G'-F')(x)=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$.

Donc $G-F=C$ sur I, où C est une fonction constante, c'est-à-dire pour tout élément x de I, $G(x)=F(x)+C$.

Exemple : Les fonctions f et g définies respectivement par $f(x)=x^2+x$ et $g(x)=x^2+x+5$ sont des primitives de la fonction $x\mapsto 2x+1$.

Remarque : L'hypothèse ***I est un intervalle*** est fondamentale.

En effet, soit les fonctions F et G définies sur $\mathbf{R}^*$ par :

$$F(x)=\frac{1}{x} \text{ et } \begin{cases} G(x)=\dfrac{1}{x}+1 \text{ si } x>0 \\ G(x)=\dfrac{1}{x}-1 \text{ si } x<0 \end{cases}.$$

Sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$, F et G ont même fonction dérivée f :

$x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$, mais il n'existe pas de fonction constante C telle que, pour tout x de $\mathbf{R}^*$, $G(x)=F(x)+C$.

Propriété 2. ***Unicité d'une primitive***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, x_0 un nombre réel de I et y_0 un nombre réel. Il existe une et une seule primitive de F de f vérifiant $F(x_0)=y_0$.

Exemple : Il existe une unique primitive F de $x\mapsto 2x+1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1)=-2$.

En effet, on a vu que les primitives sont de la forme $x\mapsto x^2+x+C$ où C est un réel.

Comme $F(1)=-2$, alors $1^2+1+C=-2$, c'est-à-dire $C=-4$.

Propriété 3. Existence d'une primitive

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Remarque : La forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue malgré le fait que son existence soit assurée par le théorème précédent.. Par exemple, la fonction $x\mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous une forme explicite.

3. Calcul de primitives

Propriété 4. Primitives des fonctions de référence

Les résultats du tableau suivant sont obtenus à partir des dérivées connues.
C désigne une constante quelconque.

Fonction	Primitives	Intervalle I
$f(x) = k$ (k constante réelle)	$F(x) = kx + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + C$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = e^x$	$f(x) = e^x + C$	$\mathbb{R}$

[comprendre les formules et les tableaux des primitives]

Propriété 5. Linéarité des primitives

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I alors :
• $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I ;
• pour tout réel k, kF est une primitive de kf sur I.

Démonstration : Soit x un élément de I. Soit k un réel.

• $(F+G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$; d'où $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur I.

• $(kG)'(x) = kF'(x) = kf(x) = (kf)(x)$; d'où kF est une primitive de kf sur I.

Attention ! : Une primitive d'un produit ne sera pas obtenue en prenant le produit des primitives, puisque la dérivée d'un produit n'est pas le produit des dérivées.

Exercice ❶ : *Pour chacune des fonctions f ci-dessous, donner toutes les primitives de f sur I :*

a) $f(x) = 3x^3 - 5x$, $I = \mathbf{R}^+$; *b)* $f(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$, $I = \mathbf{R}$; *c)* $f(x) = \dfrac{e^x + 4}{3}$, $I = \mathbf{R}$

Propriété 6. Primitives de fonctions composées

C est une constante réelle, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et u une fonction définie et dérivable sur I.

Fonction f	**Primitives F de f sur I**
$2u'u$	$u^2 + C$
$u'e^u$	$e^u + C$

Exercice ❷ : *Pour chacune des fonctions f suivantes, reconnaître une règle de dérivation permettant de déterminer ses primitives et en déduire une primitive sur l'intervalle I :*

a) $f(x) = x^2(x^3 - 1)^5$; $I = \mathbf{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$; $I =]0 ; +\infty[$.

c) $f(x) = e^{3x}$; $I = \mathbf{R}$.

comment trouver les primitives d'une fonction - les techniques

4. Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$

Propriété 7. Équation différentielle $y' = ay$

Soit a un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies par $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est un réel quelconque.

Démonstration : La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x, $f_k'(x) = ake^{ax}$. Donc f_k est une solution particulière de l'équation $y' = ay$.

Démontrons ensuite que les fonctions f_k sont les seules solutions.

On considère pour cela une fonction g solution de l'équation $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction h définie par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g'(x)e^{-ax} + g(x) \times (-a)e^{-ax} = (g'(x) - ag(x))e^{-ax}$.

Comme g est une solution de l'équation $y' = ay$, on en déduit que $h'(x) = 0$ pour tout réel x.

Par suite, h est une fonction constante.

Il existe donc un réel k tel que pour tout réel x, $h(x) = k$, c'est à dire $g(x)e^{-ax} = k$.

Par conséquent, $g(x) = \dfrac{k}{e^{-ax}} = ke^{ax}$.

Exercice ❸ : On considère l'équation différentielle $3y'+5y=0$.

a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.

b) Déterminer l'unique solution telle que $y(1)=2$.

corrigé en vidéo

5. Résolution de l'équation différentielle $y'=ay+b$

Propriété 8. Équation différentielle *y' = ay*

Soient a et b deux nombres réels $(a\neq 0)$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'=ay+b$ sont les fonctions définies par $f_k(x)=ke^{ax}-\dfrac{b}{a}$ où k est un réel quelconque.

Remarque : La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ peut s'écrire sous la forme $f_k=g_k+h$ où g_k sont les fonctions solutions de l'équation différentielle $y'=ay$ et h est la solution particulière **constante** de l'équation $y'=ay+b$?

Exercice ❹ : On considère l'équation différentielle (E) : $y'=3y-2$.

a) Déterminer une solution particulière constante de l'équation (E).

b) Déterminer toutes les solutions de de l'équation (E).

c) Déterminer l'unique solution telle que $y(0)=1$.

corrigé en vidéo