MODÈLE DÉFINI PAR UNE FONCTION	
Cours	***Terminale maths complémentaires***

Objectifs :

- *Calculer une fonction dérivée.*
- *Dresser et exploiter un tableau de variation.*
- *Déterminer des valeurs approchées, un encadrement d'une solution d'une équation du type $f(x) = k$.*
- *Reconnaître graphiquement la convexité, la concavité d'une fonction, un point d'inflexion.*
- *Étudier la convexité, la concavité d'une fonction, deux fois dérivable sur un intervalle.*

1. Dérivation et applications

1) Dérivée des fonctions usuelles

On note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f et $\mathscr{D}_{f'}$ l'ensemble de définition de la fonction dérivée de f'.

Propriété 1 : Dérivées des fonctions de référence

Fonction f	$\mathscr{D}_f$	Fonction f'	$\mathscr{D}_{f'}$
$f(x)=k$ k étant un réel	**R**	$f'(x)=0$	**R**
$f(x)=mx+p$ m et p étant des réels	**R**	$f'(x)=m$	**R**
$f(x)=x^2$	**R**	$f'(x)=2x$	**R**
$f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}^*$	**R**	$f'(x)=nx^{n-1}$	**R**
$f(x)=\frac{1}{x}$	**R***	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$	**R***
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x)=e^x$	**R**	$f'(x)=e^x$	**R**

C. Lainé

2) Dérivées et opérations

Propriété 2. ***Opérations sur les dérivées***

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
Soient u et v deux fonctions dérivables sur $\mathscr{D}$, et k un réel, alors :

- les fonctions ku, $u+v$ et uv sont dérivables sur $\mathscr{D}$ et :
$(ku)'=ku'$; $(u+v)'=u'+v'$ et $(uv)'=u'v+uv'$.

- si pour tout réel a de $\mathscr{D}$, $v(a)\neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur $\mathscr{D}$ et :
$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Exercice ❶

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes définies sur l'ensemble I.

a) $f(x)=\left(x^2+x\right)(5x-1)$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$; b) $g(x)=x^3+x^2$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$; c) $h(x)=\frac{1}{x^4}$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$;

d) $m(x)=\frac{3x-2}{4x+1}$; $\mathrm{I}=]0\,;+\infty[$; e) $n(x)=(3x+4)e^x$; $\mathrm{I}=\mathbb{R}$

3) De nouvelles formules

Propriétés 3. ***De nouvelles formules de dérivées***

- Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction composée e^u est dérivable sur I, et sa dérivée est la fonction $u'e^u$.

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout réel x, tel que $ax+b$ appartienne à I, la fonction $g:x\mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I : $g'(x)=a\times f'(ax+b)$.

- Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction $x\mapsto u^2(x)$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I :
$\left(u^2\right)'(x)=2\times u'(x)\times u(x)$.

Exemples :

- Soit $f(x)=e^{3x-1}$. La fonction u définie par $u(x)=3x-1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.
Donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$, et pour tout réel x, $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}=3\times e^{3x-1}$.

- Soit $g(x)=e^{\frac{1}{x}}$. La fonction v définie par $v(x)=\frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$.
Donc g est dérivable sur $\mathbf{R}^*$, et pour tout réel x non nul, $g'(x)=v'(x)e^{v(x)}=-\frac{1}{x^2}\times e^{\frac{1}{x}}$.

- Soit f la fonction définie par $f(x)=\sqrt{3x+6}$.

$f(x)$ existe si $3x+6 \geq 0$, c'est-à-dire si $x \geq -2$; ainsi $D_f = [-2\ ;\ +\infty[$.

Pour tout réel x de D_f, on peut écrire $f(x) = g(3x+6)$ où g est la fonction racine carrée $X \mapsto \sqrt{X}$.

La fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et pour tout $X > 0$, $g'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$.

On a $X > 0$ lorsque $x > -2$. Par conséquent, f est dérivable sur $D_f =]-2\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x > -2$, $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+6}}$.

• Soit $f(x) = (3x+7)^2$. La fonction u définie par $u(x) = 3x+7$ est dérivable sur **R**.
Donc f est dérivable sur **R**, et pour tout réel x,
$f'(x) = 2u'(x)u(x) = 2 \times 3 \times (3x+7) = 6(3x+7)$.

Exercice ❷

Déterminer la dérivée des fonctions suivantes définies sur l'ensemble I.

a) $f(x) = (2x^3 - 3)^2$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; b) $g(x) = (x-1)^3$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$; c) $h(x) = (2x-1)e^{-x+3}$; $\mathrm{I} = \mathbb{R}$

4) Application de la dérivation

Propriété 4. ***Sens de variation d'une fonction***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- f est croissante sur I, si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur I, si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) \leq 0$.
- f est constante sur I, si et seulement si, pour tout x de I, $f'(x) = 0$.

Exemple : *Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^3 + 9$. Étudier les variations de f.*

f est une fonction polynôme ; elle est donc dérivable sur **R**, et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2$.
On en déduit que, pour tout réel x, $f'(x) \geq 0$.
Par conséquent, f est strictement croissante sur **R**.

On résume ces résultats dans un tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f		↗	9	↗	

C. Lainé

Définition 1. *Tangente à une courbe*

Si f est dérivable en x_A dans un repère, la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en x_A est la droite qui a pour coefficient directeur $f'(x_A)$ et qui passe par le point *A* de coordonnées $(x_A\,;f(x_A))$.

Propriété 5. *Tangente à une courbe*

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en x_A est la droite qui a pour équation $y=f'(x_A)(x-x_A)+f(x_A)$.

Méthode pour déterminer par le calcul l'équation d'une tangente à une courbe en un point

On a tracé sur la courbe représentative de la fonction carrée la tangente au point d'abscisse -1.

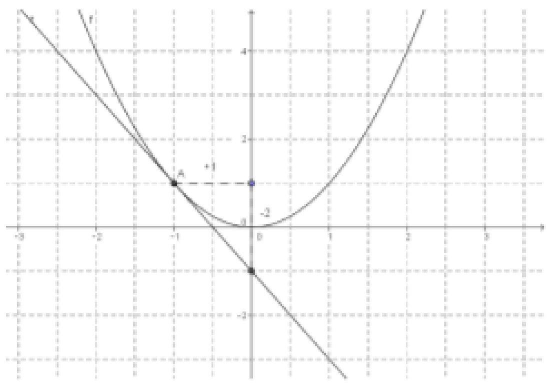
On a $f'(x)=2x$, pour tout réel x.

$f'(x_A)=2\times(-1)=-2$ et $f(x_A)=(-1)^2=1$

Par suite, l'équation de la tangente à la courbe en *A* est : $y=-2(x-(-1))+1$, c'est-à-dire

$y=-2(x+1)+1=-2x-2+1$

D'où l'équation de la tangente au point d'abscisse -1 est : $y=-2x-1$.



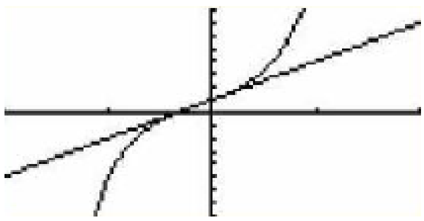
Méthode pour déterminer l'équation d'une tangente à une courbe en un point à l'aide de la calculatrice T.I.

Après rentrer la fonction carrée, suivez les étapes suivantes :
Touches « `2nde` » + « `PGRM` » (Dessin) puis « `5: Tangente` » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici -1. Puis « `ENTER` ».

Exercice ❸

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(3x+1)e^{x^2}$.

On a tracé ci-contre $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative ainsi que la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.



1) Calculer $f'(x)$.

2) Étudier les variations de *f*.

3) a) Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathscr{T}$.

b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la tangente $\mathscr{T}$.

2. Continuité d'une fonction

Le mathématicien allemand *Karl Weierstrass* (1815 ; 1897) apporte les premières définitions rigoureuses au concept de limite et de continuité d'une fonction.

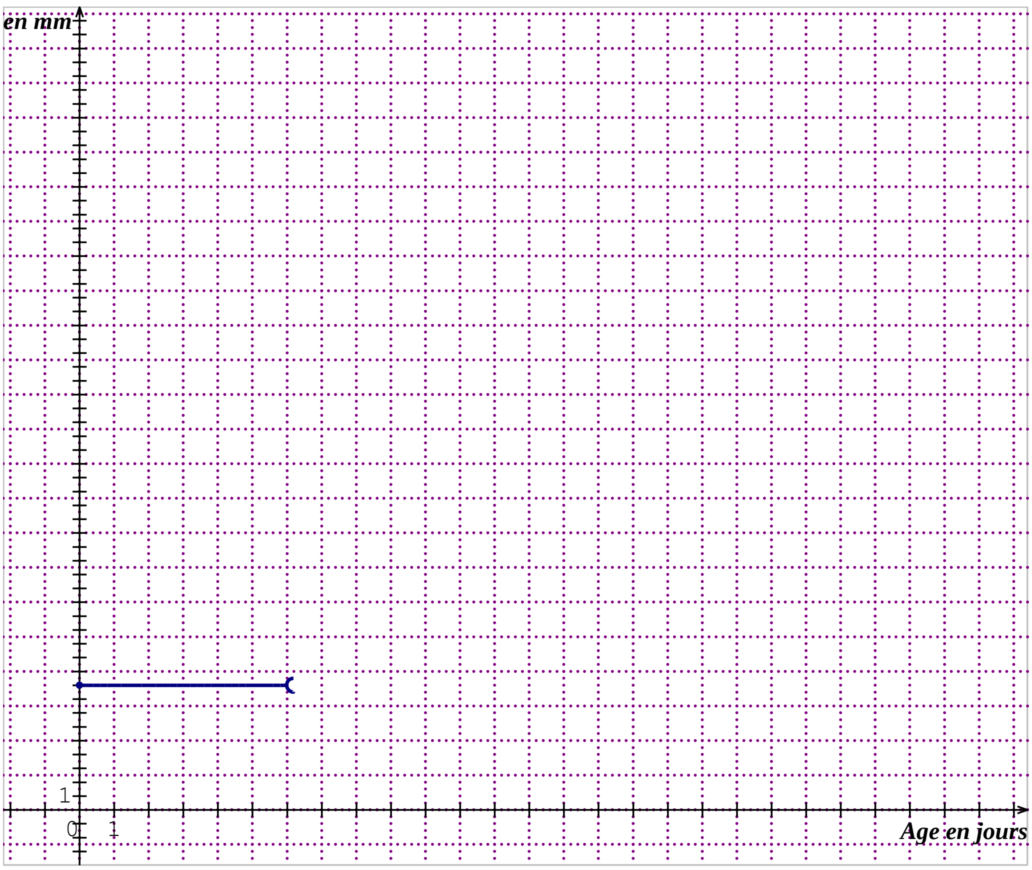
1) Vers l'idée de continuité

Le criquet est enfermé dans une cuticule inextensible. La taille du criquet, s'accroît brusquement par paliers chaque fois qu'il se débarrasse de son enveloppe rigide, c'est-à-dire chaque fois qu'il mue. Les biologistes disent que le criquet a une croissance « discontinue ». Le tableau ci-dessous donne la taille du criquet en fonction de son âge.

Age du criquet	Taille du criquet
De 0 à 6 jours exclu	9 mm
De 6 à 8 jours exclu	12 mm
De 8 à 10 jours exclu	16 mm
De 10 à 13 jours exclu	21 mm
De 13 à 16 jours exclu	27 mm
A partir du 16$^{\text{ème}}$ jour	40 mm

a) Compléter le graphique suivant qui représente la fonction suivante :

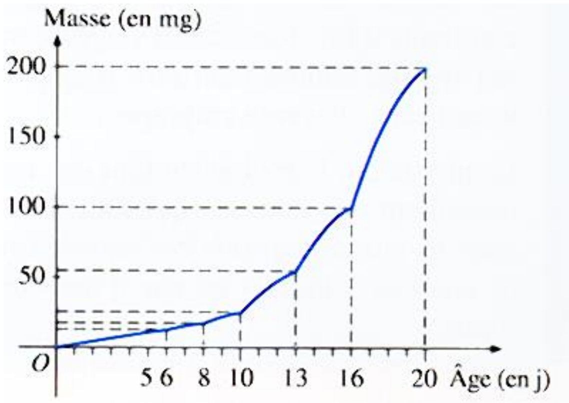
$$f:\ (\text{âge en jours}) \mapsto (\text{taille en mm})$$



La courbe précédente $\mathscr{C}_f$ peut-elle être tracée sans lever le crayon autour du point d'abscisse 13 ?

b) Le graphique ci-dessous représente la fonction suivante :

$$g \ : \ (\text{âge en jours}) \mapsto (\text{masse en mg}).$$

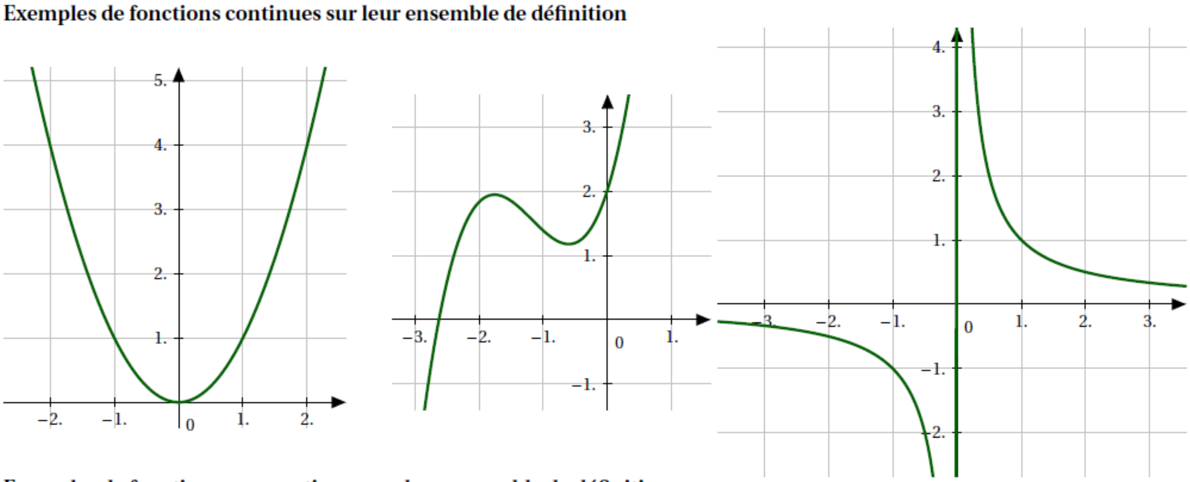


Cette courbe peut-elle être tracée sans lever le crayon ?

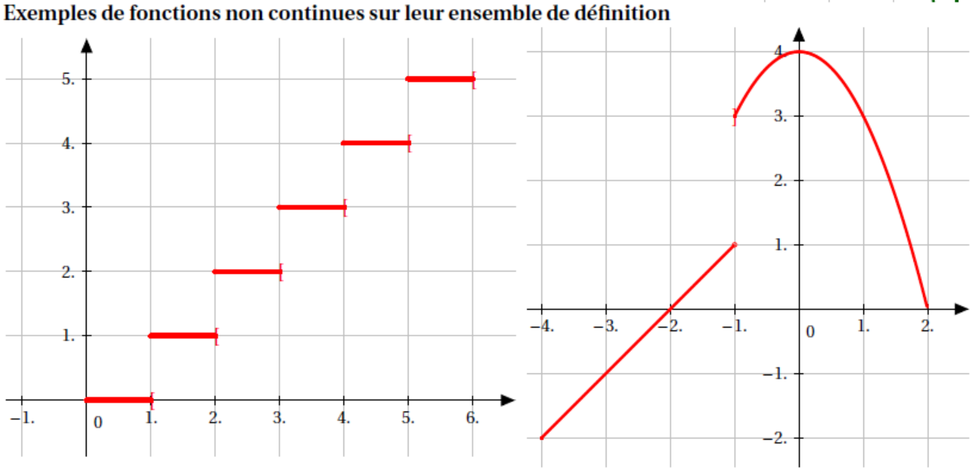
Définition 2. ***Fonction continue***

Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathtt{I}$. On dit que f est continue sur $\mathtt{I}$ lorsqu'on peut tracer sa courbe représentative sans avoir à "lever le crayon".
En d'autres termes, f est continue sur $\mathtt{I}$ lorsque sa courbe représentative est " en un seul morceau " sur $\mathtt{I}$.

Exemples de fonctions continues sur leur ensemble de définition



Exemples de fonctions non continues sur leur ensemble de définition



C. Lainé

2) Dérivabilité et continuité

Propriété 6. ***Fonction continue***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a

Remarques : Cette propriété nous donne un moyen pour démontrer qu'une fonction est continue sur un intervalle I ; il suffit en effet de démontrer que cette fonction est dérivable sur I.

• La réciproque de cette propriété est fausse.
Par exemple, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

3) Tableau de variations et continuité

Dans un tableau de variations, on ne coupe pas les flèches sur les intervalles où la fonction *f* est continue et monotone.

Exemple : Voici le tableau de variations de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	$\searrow$	||	$\searrow$

Ce tableau représente une fonction continue sur $]-\infty\ ;\ 2[$ et sur $]2\ ;\ +\infty[$.

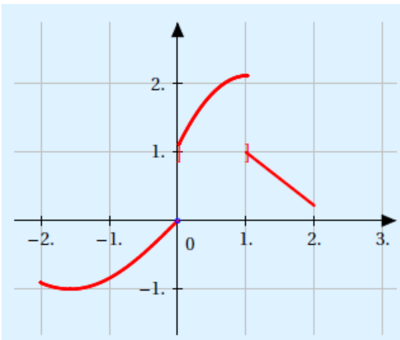
4) Fonctions de référence

Propriété 7 : formule des probabilités totales. ***Arbre***

• Les fonctions polynômes et les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.
• La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
• La somme, le produit, le quotient, la composée de fonctions continues est une fonction continue sur tout intervalle sur lequel elle est définie.

Exercice ❹

On a représenté une fonction *f* définie sur l'intervalle I.



1) Quel est l'intervalle I ?
2) *f* est-elle continue sur $[-2\ ;\ 1]$? Justifier clairement.
3) *f* est-elle continue sur $]0\ ;\ 2]$? Justifier clairement.
4) Donner un intervalle sur lequel *f* est continue.

Exercice ❺

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x-1)e^x$.

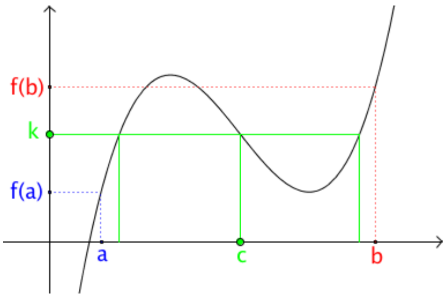
Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Théorème des valeurs intermédiaires

1) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 1. ***Théorème des valeurs intermédiaires***

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, et, a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c)=k$.



Ce théorème signifie que si les hypothèses sont réalisées alors pour tout réel k entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ d'inconnue x admet au moins une solution entre a et b.

• Ce théorème traduit de façon rigoureuse la propriété suivante :

Propriété 8.

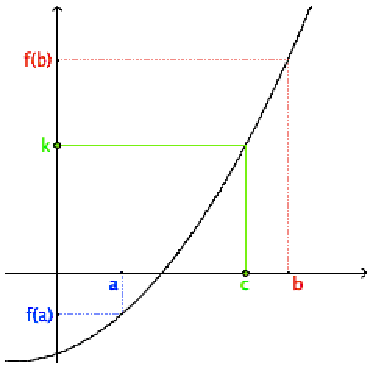
« A et B sont deux points d'abscisses a et b de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f.
Si on peut tracer $\mathscr{C}_f$ entre A et B sans lever le crayon, alors toute droite d'équation $y=k$ où k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, coupe la courbe $\mathscr{C}_f$ en au moins un point. »

• La continuité de f est une condition suffisante pour assurer l'existence de c, elle n'est pas nécessaire.

2) Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 2. ***Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires***

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur $[a\,;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un et un seul réel c dans $[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.



Exercice ❻

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3-3x^2+2$.

1) Démontrer que $f'(x)=3x(x-2)$.

2) En déduire les variations de f sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

3) Démontrer que l'équation $f(x)=0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

4) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.

5) Dresser le tableau de signes de la fonction f sur l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

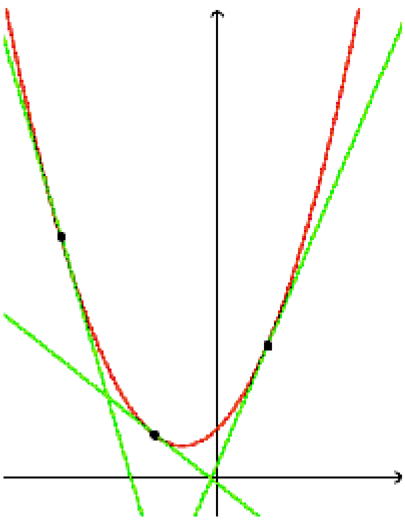
4. Convexité d'une fonction

1) Fonction convexe et fonction concave

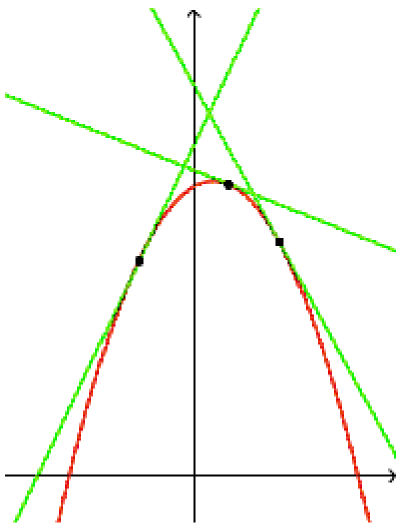
Définition 3. ***Convexité d'une fonction***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que la fonction f est convexe sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que la fonction f est concave sur I signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.



CONVEXE



CONCAVE

Propriété 9. ***Convexité des fonctions de référence***

- La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.
- La fonction cube est concave sur $]-\infty\,;\,0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $]-\infty\,;\,0[$ et convexe sur $]0\,;+\infty[$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0\,;+\infty[$.
- La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) Convexité et dérivée

Théorème 3. ***Lien entre la convexité d'une fonction et sa dérivée***

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I.

Remarque : On appelle dérivée seconde d'une fonction la dérivée de sa dérivée, on la note f''. On peut traduire le théorème précédent avec le signe de la dérivée seconde.

Propriété 10. ***Lien entre la convexité d'une fonction et sa dérivée seconde***

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
- f est convexe sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est positive sur I.
- f est concave sur I si, et seulement si, sa dérivée seconde f'' est négative sur I.

Exercice ❼

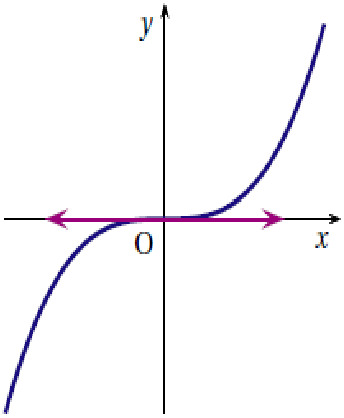
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2-2x+4$. Montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) Point d'inflexion

Définition 4. ***Point d'inflexion***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
S'il existe un point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que A est un point d'inflexion.

Exemple :



Soit f la fonction cube.
La tangente au point O à la courbe $\mathscr{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.
- Pour $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty\ ;\ 0]$.
- Pour $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0\ ; +\infty[$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ traverse sa tangente en O donc l'origine du repère est un point d'inflexion de la fonction cube.

On en déduit les propriétés suivantes :

Propriété 11. ***Lien entre la convexité d'une fonction et sa dérivée seconde***

- En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
- Si la dérivée f' change de sens de variation en a, alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.
- Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a, alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a.

Exercice ❽

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Montrer que f admet un point d'inflexion.