PROBABILITÉS CONDITIONNELLES	
Cours	*Terminale maths complémentaires*

1. Probabilité conditionnelle et arbre pondéré

Définition 1. ***Probabilité conditionnelle***

On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $p_A(B)$ et est définie par : $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Exercice ❶

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soient *A* l'événement « Le résultat est un pique » et *B* l'événement « Le résultat est un roi ».
1) Calculer la probabilité de l'événement « le résultat est un roi de pique ».
2) Déterminer la probabilité de l'événement *A*.
3) Calculer la probabilité $p_A(B)$.
4) La carte tirée est un roi. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse du roi de pique ?

corrigé en vidéo

Exercice ❷

Un sachet de 100 bonbons contient 40 bonbons acidulés, les autres bonbons sont à la guimauve. 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange et 10 bonbons sont acidulés et au parfum orange. Les bonbons qui ne sont pas au parfum orange sont à la fraise. On choisit un bonbon au hasard dans ce sachet.

On note :
- *A* : l'événement : « le bonbon est acidulé » ;
- *G* : l'événement : « le bonbon est à la guimauve » ;
- *F* : l'événement : « le bonbon est à la fraise » ;
- *O* : l'événement : « le bonbon est au parfum orange ».

1) J'ai pris une guimauve. Déterminer la probabilité que cette guimauve soit à l'orange.
2) J'ai pris un bonbon acidulé. Déterminer la probabilité qu'il soit à l'orange.
3) J'ai pris un bonbon. Déterminer la probabilité que ce soit une guimauve à l'orange.

Remarque : La probabilité conditionnelle suit les règles et lois de probabilités vues dans les classes antérieures. En particulier, on a les propriétés suivantes :

Propriété 1. ***Règles et lois de la probabilité conditionnelle***

Soient A et B deux événements avec $p(A) \neq 0$.

- **$0 \leq p_A(B) \leq 1$; $p_A(A) = 1$; $p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$.**

Exercice ❸

Dans une entreprise qui compte 360 employés, on compte 60 % d'hommes et parmi ceux-là, 12,5 % sont des cadres.
Par ailleurs, 87,5 % des femmes de cette entreprise sont ouvrières ou techniciennes.

1) Compléter le tableau suivant :

	Hommes (H)	Femmes (F)	Total
Cadres (C)			
Ouvriers, techniciens (O)			
Total			

2) Déterminons la probabilité de rencontrer un cadre sachant c'est un homme.

Règle 1. ***Arbre pondéré***

Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.

Règle 2. ***Arbre pondéré***

Dans un arbre pondéré, pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités des branches de ce chemin.

Règle 3 : formule des probabilités totales. ***Arbre pondéré***

La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

Exercice ❹

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.
Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie.
On obtient les résultats suivants :
- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.
On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

1) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

corrigé en vidéo

Exercice ❺

Liam s'est créé une adresse électronique.
Au bout de quelques semaines, il constate que 90% des messages reçus dans sa boîte mail sont des spams, c'est-à-dire des messages indésirables. Il achète donc un logiciel qui classe les messages en deux catégories : normaux et indésirables.
Après l'utilisation, il constate que 1 % des messages normaux (non spams) reçus sont classés en indésirables. Il constate également que 11,7 % des messages sont classés normaux.
On note S l'événement « le message reçu est un spam » et N l'événement « le message est classé normal ».
1) Traduire cette situation par un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité qu'un message soit classé normal, alors que c'est un spam.

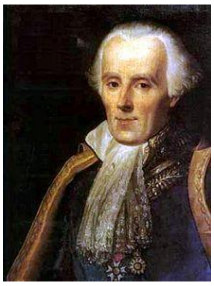
2. Inversement du conditionnement

Propriété 2. *Formule de Bayes*

Soient A et B deux évènements de probabilités non nulles.

On a : $p_B(A) = \dfrac{p(A) \times p_A(B)}{p(B)}$.

Thomas Bayes (environ 1702-1761)



Laplace (1749-1827)

La formulation initiale est issue des travaux du révérend Thomas Bayes et est plus limitée, elle a été retrouvée indépendamment par Laplace.
Outre son utilisation en probabilité, ce théorème est fondamental pour l'inférence bayésienne qui s'est montrée très utile en intelligence artificielle. *(Source : wikipédia)*

Démonstration : Comme $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$, alors $p_A(B) \times p(A) = p(A \cap B)$.

De plus, $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, alors $p_B(A) \times p(B) = p(A \cap B)$. On en déduit que

$p_B(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$. Comme $p(B) \neq 0$, alors $p_B(A) = \dfrac{p_A(B) \times p(A)}{p(B)}$

Exercice ❻

20 % des assurés d'une compagnie d'assurance sont jeunes conducteurs (J), les autres étant des conducteurs expérimentés. Une étude statistique indique que la probabilité qu'un assuré jeune conducteur ait un sinistre responsable (S) au cours de l'année est de 10 % contre 6 % pour les assurés expérimentés.

1) Traduire cette situation par un arbre pondéré.
2) En utilisant la formule de Bayes, calculer la probabilité qu'un assuré ayant eu un sinistre au cours de l'année soit jeune conducteur.

3. Événements indépendants

Définition 2. *Événements indépendants*

On dit que deux évènements A et B de probabilité non nulle sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Exercice ❼

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soient *R* l'évènement « On tire un roi » et *T* l'évènement « On tire un trèfle ».

1) Déterminer la probabilité de l'évènement « On tire le roi de trèfle ».
2) Les événements *R* et *T* sont-ils indépendants ?

[corrigé en vidéo]

Exercice ❽

Dans une population, un individu est atteint par la maladie m avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie n avec une probabilité égale à 0,01.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soient *M* l'événement « L'individu a la maladie m » et *N* l'événement « L'individu a la maladie n ». On suppose que les événements *M* et *N* sont indépendants.
Calculer la probabilité de l'événement *A* : « L'individu a au moins une des deux maladies ».

[corrigé en vidéo]

Propriété 3. *Événements indépendants*

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle de Ω.
- **A et B sont indépendants si, et seulement si, $p_A(B) = p(B)$**
- **A et B sont indépendants si, et seulement si, $p_B(A) = p(A)$**

Exercice ❾

On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant les six jetons :
- Trois jetons rouges marqués 1, 2, 3 ;
- Deux jetons bleus marqués 1, 2 ;
- Un jeton vert marqué 1.

On considère les événements *R* : « le jeton est rouge », *U* : « le numéro est 1 » et *D* : « le numéro est 2 ».

1) Les événements *R* et *U* sont-ils indépendants ?
2) Les événements *R* et *D* sont-ils indépendants ?

Propriété 4. *Événements indépendants*

Si A et B sont indépendants alors $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Exercice ❿

Lors d'un week-end prolongé, Bison futé annonce qu'il y a 42 % de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63 % sur l'autoroute A7.
Soit *A* l'événement « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6. »
Soit *B* l'événement « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7. »
On suppose que les événements *A* et *B* sont indépendants.
Calculer la probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7, mais pas sur l'autoroute A6.

corrigé en vidéo