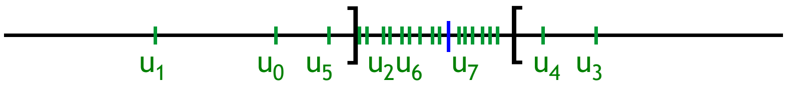
LES SUITES	
Cours	*Terminale maths complémentaires*

1. Limite d'une suite

1) Suites convergentes

Définition 1 : **Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel.**
Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ, ou que la suite (u_n) converge vers ℓ.

On écrira $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.



Remarques : • Dire qu'une suite converge vers ℓ revient aussi à dire que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

• Dire qu'une suite converge vers ℓ revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi proche de ℓ que l'on veut à partir d'un certain rang.

• Lorsqu'elle existe cette limite est unique.

Exemples : Les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$ et $w_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, convergent vers 0.

2) Algorithme : Déterminer à partir de quel entier N, u_n est dans un Intervalle contenant ℓ.

Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0{,}1$ et $u_{n+1} = 2u_n(1 - u_n)$.
Cette suite converge vers $\ell = 0{,}5$.
On veut connaître à partir de quel entier N la suite est dans l'intervalle ouvert centré en 0,5 et de rayon 10^{-3}.
Le programme ci-contre permet de trouver N, grâce à un "Tant que".

Variables : N : entier U : réel
Entrées et initialisation
  $0,1 \to U$
  $0 \to N$
Traitement
  tant que $|U - 0,5| \geqslant 10^{-3}$
  faire
    $2U(1 - U) \to U$
    $N + 1 \to N$
  fin
Sorties : Afficher N, $|U - 0,5|$

```
def seuil():
      U=0.75
      N=0
      while (abs(U-0.5)>=0.001) :
                U=2*U*(1-U)
                N=N+1
       return N
```


C. Lainé

2) Suites divergentes

Définitions 2 : **Soit (u_n) une suite.**
Si tout intervalle de la forme $]A$; $+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$. On écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si tout intervalle de la forme $]-\infty$; $A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) a pour limite $-\infty$. On écrira $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Remarques : • Dire qu'une suite a pour limite $+\infty$ revient aussi à dire que tout intervalle $]A$; $+\infty[$ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

• Dire qu'une suite a pour limite $+\infty$ revient aussi à dire que son terme général u_n est aussi grand que l'on veut à partir d'un certain rang.

• Le mot de convergence n'est utilisé que dans le cas d'une limite finie.

• Une suite divergente peut avoir une limite infinie ou ne pas avoir de limite. Par exemple, la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Exemples : Les suites définies sur **N** par : $u_n = n$, $v_n = n^2$ et $w_n = \sqrt{n}$, divergent vers $+\infty$.

3) Algorithme : Déterminer à partir de quel entier N, u_n est supérieur à un nombre donné A (dans le cas où (u_n) est croissante).

Soit la suite (u_n) définie par :

$u_0 = -2$ et $u_{n+1} = \frac{4}{3}u_n + 1$.

On peut montrer que cette suite est croissante et qu'elle diverge vers $+\infty$.
On voudrait connaître à partir de quel entier N, u_n est supérieur à 10^3.

```
Variables : N : entier    U : réel
Entrées et initialisation
    −2 → U
    0 → N
Traitement
    tant que U ⩽ 10^3 faire
        (4/3)U + 1 → U
        N + 1 → N
    fin
Sorties : Afficher N, U
```

```
def seuil(A):
      U=-2
      N=0
      while U<A :
            U=(4/3)*U+1
            N=N+1
      return N
```

2. Opérations sur les limites

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n) =$						F.I. *

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemples : ● Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+n\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = ...$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = ...$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+n\right) = ...$ (par somme de limites).

● Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n+1+\dfrac{2}{n}\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n+1\right) = ...$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{2}{n} = ...$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3n+1+\dfrac{2}{n}\right) = ...$ (par somme de limites).

2) Limite d'un produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(u_n v_n\right) =$									F.I.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1\right)$.

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}} = ...$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1\right) = ...$ (par somme de limites)

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = ...$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+3\right) = ...$ (par somme de limites)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}+1\right) = ...$ (par produit de limites)

3) Limite d'un quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n =$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n>0$	0 avec $v_n<0$	0 avec $v_n<0$	0	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n} =$							F.I.					F.I.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3}{n^2+7}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = ...$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2+7\right) = ...$ (par somme de limites)

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-3\right) = ...$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-3}{n^2+7} = ...$ (par quotient de limites)

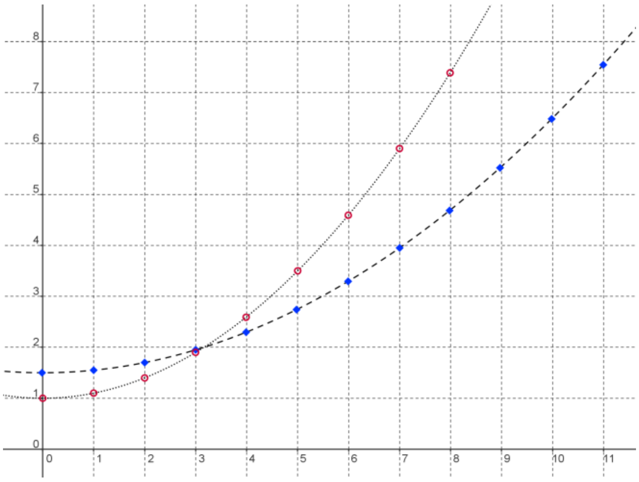
4) Méthodes pour lever une indétermination

Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2-n+2\right)$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n^2+2}{n+1}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-6}{2n+1}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$.

3. Théorèmes de comparaison

1) Théorèmes de comparaison

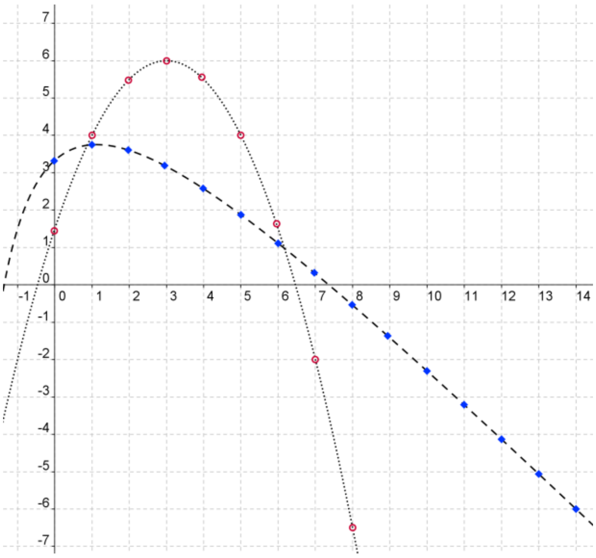
<u>Théorème 1</u> (admis) : **Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur N.**
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \le v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.



Dans le dessin ci-contre, les termes de la suite (u_n) sont données par les abscisses des points ◆ et ceux de la suite (v_n) sont données par les abscisses des points ⭕

Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (v_n) qui est « au-dessus » à partir du rang 4 divergera obligatoirement vers $+\infty$.

<u>Théorème 2</u> (admis) : **Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies sur N.**
Si, à partir d'un certain rang, $v_n \le u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.



Dans le dessin ci-contre, les termes de la suite (u_n) sont données par les abscisses des points ◆ et ceux de la suite (v_n) sont données par les abscisses des points ⭕

Si (u_n) diverge vers $-\infty$, alors (v_n) qui est « en dessous » à partir du rang 7 divergera obligatoirement vers $+\infty$.

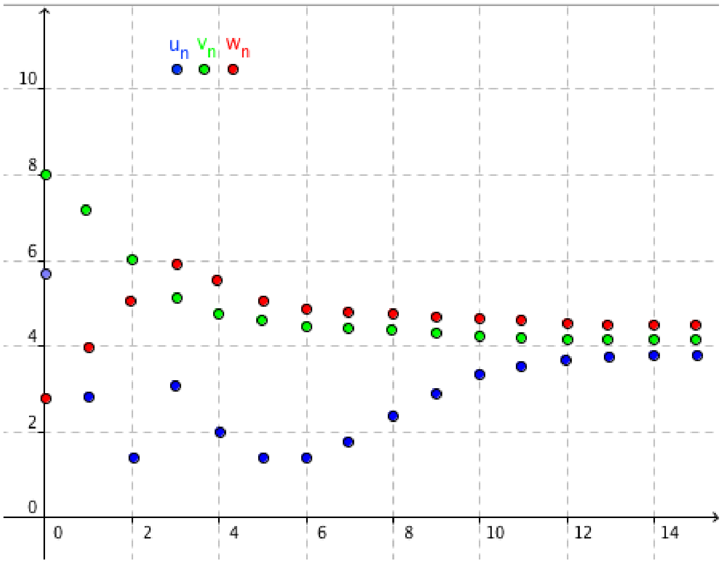
<u>Exemple</u> : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n+\sin(n)\right)$.

Pour tout entier n, ... $\le \sin(n) \le$ ...... ; par suite, ... $\le \sin(n)+n \le$ ....

D'où ......$\leq \sin(n)+n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-1)=$...... ; par conséquent, $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+\sin(n))=$...... .

2) Théorème des « gendarmes »

Théorème 3 (admis) : **Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur N.**
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=\ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\ell$.



Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(n)}{n+1}$.

Pour tout entier n, ...$\leq \sin(n) \leq$...... ; par suite, ...$\leq \dfrac{\sin(n)}{n+1} \leq$...... car $n+1$...... .

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1)=$...... ; d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{-1}{n+1}=$...... et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n+1}=$...... (par quotient de limites).

D'après le théorème des « gendarmes », on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\sin(n)}{n+1}=$...... .

4. Limite d'une suite géométrique

Théorème 4 (admis) : **Soit un réel q strictement positif.**

- **Si $q>1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.**
- **Si $q=1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=1$.**
- **Si $0<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.**

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} 7\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

Comme $0<\dfrac{1}{4}<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=$...... . Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} 7\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^n=$...... .

C. Lainé

Propriété 2 : **Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q telle que $0<q<1$. La somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) est égale à $S_n = u_0+u_1+...+u_n = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q}$.**

Démonstration : On sait que S_n est égale à $u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$ (vu en Première).

Comme $0<q<1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = ...$. D'où, par somme de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-q^n\right) = ...$.

Par quotient de limites, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = ...$.

Par conséquent, par produit de limites, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = ...\times ...... = \frac{......}{......}$.

démonstration en vidéo

Exemple : Déterminer la limite de la somme S_n des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0=4$ et de raison 2.

D'après la propriété précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = ... = ...$.

5. Suites arithmético-géométriques

1) Définition

Définition 3 : **Une suite arithmético-géométrique (u_n) est une suite définie pour tout entier naturel n par la relation $u_{n+1} = au_n + b$, où a et b sont des réels.**

2) Représentation graphique

Pour représenter graphiquement les termes d'une suite arithmético-géométrique, on peut utiliser la méthode suivante qui ne nécessite pas de calculer les valeurs des termes successifs.

Méthode

(u_n) est une suite arithmético-géométrique de premier terme u_0.
Pour représenter graphiquement cette suite dans un repère orthonormé, on procède de la façon suivante :

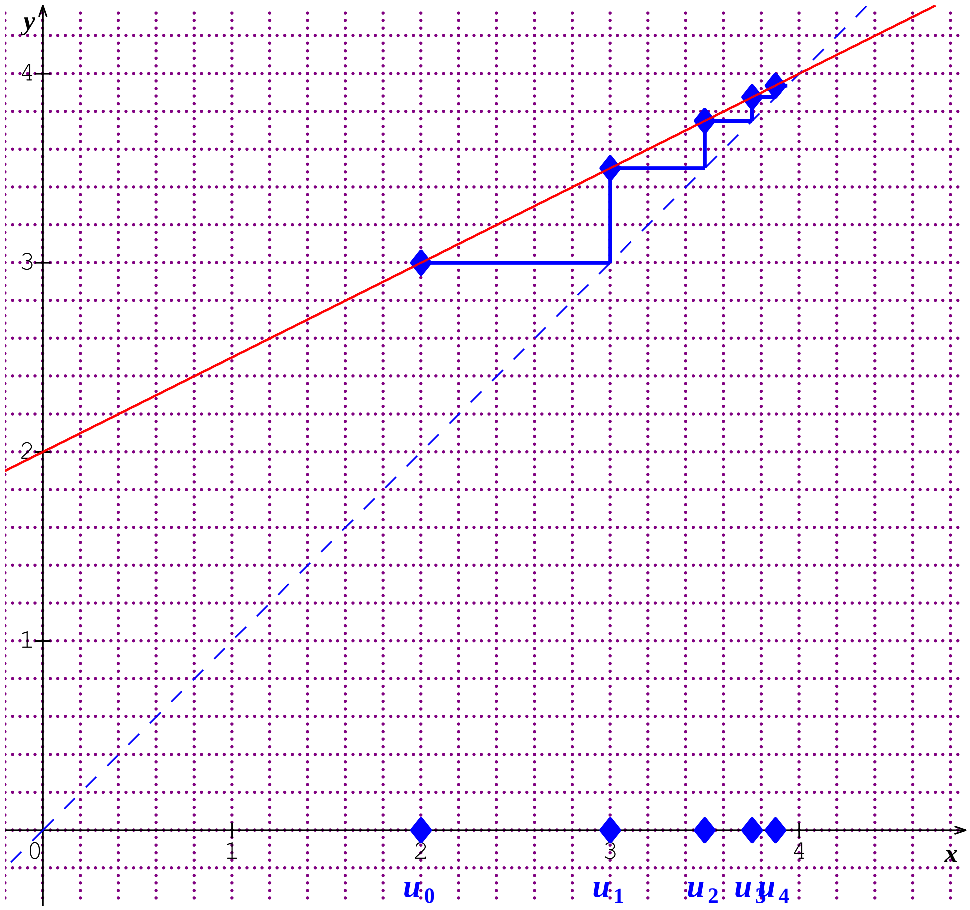
(1) on trace la droite Δ d'équation $y=x$ et la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=ax+b$;

(2) on place u_0 sur l'axe des abscisses ;

(3) on utilise la droite $\mathscr{D}$ pour placer $u_1 = au_0+b$ sur l'axe des ordonnées, puis on utilise la droite Δ pour reporter u_1 sur l'axe des abscisses ;

(4) on recommence l'étape (3) pour placer u_2, u_3, ... sur l'axe des abscisses.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=2$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0{,}5u_n+2$.



 méthode en vidéo

 **Méthode pour représenter une suite arithmético-géométrique avec une T.I. 83**

 méthode en vidéo

3) Étude d'une suite arithmético-géométrique

En 2020, Liam a planté 20 orchidées sous serre pour approvisionner son magasin. Chaque année, il estime que 25 % des orchidées existantes ne fleuriront plus.
Il décide de les éliminer et d'en planter 2 nouvelles chaque année.
Il voudrait savoir comment va évoluer, à long terme, le nombre d'orchidées sous la serre.
On note (u_n) le nombre d'orchidées l'année $2020+n$
Ainsi, $u_0 = 20$.

1) Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 2$.
2) Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 8$.
   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n.

3) En déduire u_n en fonction de n.

4) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat.