SYSTÈMES

Objectifs :

• *Résoudre algébriquement un système de deux équations du premier degré à deux inconnues admettant une solution et une seule ; en donner une interprétation graphique.*

1. Définition

Un système de deux équations linéaires à deux inconnues x et y est un système qui peut s'écrire sous la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, c, a', b' et c' sont des nombres.
Résoudre un tel système consiste à déterminer, s'il y en a, tous les couples qui sont solutions des deux équations à la fois.

Exemple : $\begin{cases} x-2y=2 \\ x+y=5 \end{cases}$ est un système à deux équations à deux inconnues.

Le couple $(1\,;\,2)$ n'est pas une solution de ce système car $\begin{cases} 1-2\times 2=-3\neq 2 \\ 1+2=3\neq 5 \end{cases}$.

Le couple $(4\,;\,1)$ n'est pas une solution de ce système car $\begin{cases} 4-2\times 1=2 \\ 4+1=5 \end{cases}$.

2. Méthodes de résolution d'un système

1) Méthode par substitution

Résoudre le système suivant $\begin{cases} x-2y=2 \\ x+y=5 \end{cases}$.

On exprime, grâce à l'une des deux équations, une inconnue en fonction de l'autre.
Ici il est facile d'exprimer x en fonction de y grâce à la seconde équation.

$$\begin{cases} x-2y=2 \\ y=5-x \end{cases}$$

On substitue x par $y=5-x$ dans la première équation.

$$\begin{cases} x-2(5-x)=2 \\ y=5-x \end{cases}$$

On développe, on réduit et on résout l'équation d'inconnue x ainsi obtenue.

$$\begin{cases} x-10+2x=2 \\ y=5-x \end{cases}$$

C. Lainé

$$\begin{cases} 3x - 10 = 2 \\ y = 5 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 10 + 10 = 2 + 10 \\ y = 5 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 12 \\ y = 5 - x \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 12 \div 3 = 4 \\ y = 5 - x \end{cases}$$

On remplace x par sa valeur dans la seconde équation pour trouver y.

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 5 - 4 = 1 \end{cases}$$

On vérifie que les valeurs trouvées pour x et y conviennent.

$$\begin{cases} 4 - 2 \times 1 = 2 \\ 4 + 1 = 5 \end{cases}$$

On conclut par une phrase :

le système admet un unique couple solution, qui est $(4 ; 1)$.

2) Méthode par combinaisons linéaires

Résoudre le système suivant $\begin{cases} 3x + 2y = 11 & ❶ \\ 4x - 5y = -16 & ❷ \end{cases}$.

On multiplie une des équations (ou les deux) par un (des) nombre(s) bien choisi(s), de façon que les coefficients d'une même inconnue soient opposés. Ici on multiplie la première par 4 et la seconde par 3.

$$\begin{cases} 12x + 8y = 44 & ❶ \times 4 = ❸ \\ 12x - 15y = -48 & ❷ \times 3 = ❹ \end{cases}$$

On soustrait les deux équations membre à membre pour éliminer l'une des inconnues, et on remplace l'une des équations (par exemple, ici, la première) par l'équation ainsi obtenue

$$\begin{cases} (12x + 8y) - (12x - 15y) = 44 - (-48) & ❸ - ❹ \\ 3x + 2y = 11 & ❶ \end{cases}$$

$$\begin{cases} 23y = 92 & ❸ - ❹ \\ 3x + 2y = 11 & ❶ \end{cases}$$

On résout l'équation d'inconnue y ainsi obtenue.

$$\begin{cases} y = \dfrac{92}{23} = 4 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$$

On remplace y par sa valeur dans la seconde équation pour trouver x.

$$\begin{cases} y = 4 \\ 3x + 2 \times 4 = 11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 \\ 3x + 8 - 8 = 11 - 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 \\ 3x = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 4 \\ x = \dfrac{3}{3} = 1 \end{cases}$$

On vérifie que les valeurs trouvées pour x et y conviennent.

$$\begin{cases} 3 \times 1 + 2 \times 4 = 11 \\ 4 \times 1 - 5 \times 4 = -16 \end{cases}$$

On conclut par une phrase : **le système admet un unique couple solution, qui est $(1\ ;\ 4)$.**

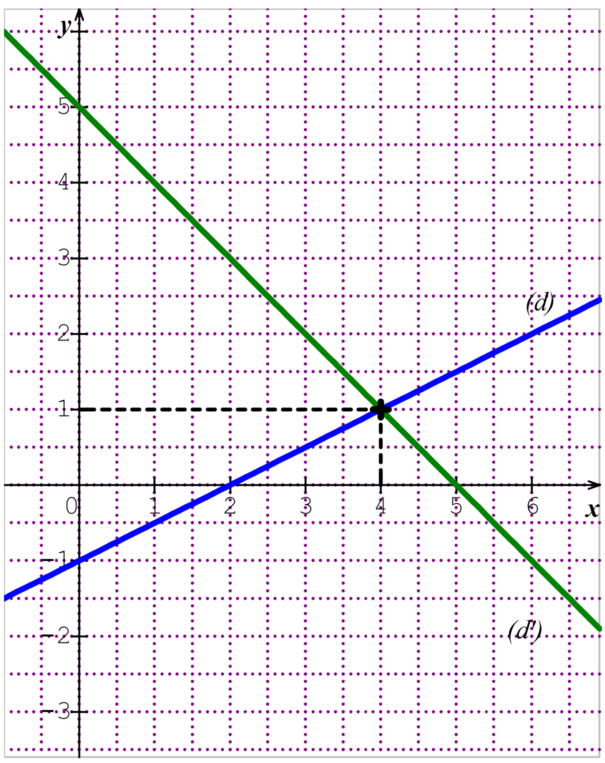
3. Interprétation graphique

On considère le système $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x + y = 5 \end{cases}$.

On commence par transformer les deux équations du système, de façon à les mettre sous la forme d'une équation de droite du type $y = ax + b$.

$\begin{cases} x - 2y - x = 2 - x \\ x + y - x = 5 - x \end{cases}$; $\begin{cases} -2y = 2 - x \\ y = 5 - x \end{cases}$; $\begin{cases} -2y \div (-2) = (2 - x) \div (-2) \\ y = -x + 5 \end{cases}$; $\begin{cases} y = 0,5x - 1 \\ y = -x + 5 \end{cases}$

On désigne par *(d)* et *(d')* les droites représentant les fonctions respectives : $f(x) = 0,5x - 1$ et $g(x) = -x + 5$.



La solution du système est donc le couple $(x\ ;\ y)$ coordonnées du point d'intersection des deux droites *(d)* et *(d')*.
Par lecture graphique, **on trouve le couple $(4\ ;\ 1)$ comme solution du système**.