RACINES CARRÉES

Objectifs :

- *Savoir que, si a désigne un nombre positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré est a et utiliser les égalités : $(\sqrt{a})^2 = a$, $\sqrt{a^2} = a$.*
- *Déterminer, sur des exemples numériques, les nombres x tels que $x^2 = a$, où a est un nombre positif.*
- *Sur des exemples numériques, où a et b sont deux nombres positifs, utiliser les égalités :*

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ *(b non nul).*

1. Définition et propriétés

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré est a.

Exemples : $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{23{,}04} = 4{,}8$ et $\sqrt{2} \approx 1{,}414$.

Remarque : $\sqrt{a}$ n'a pas de sens lorsque a est nombre strictement négatif.
En effet, un nombre au carré est toujours positif d'après « la règle des signes » ; donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.

Conséquence :

Pour tout nombre a positif, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Exemple : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

Propriété : Pour tout nombre a positif, $\sqrt{a^2} = a$.

Exemples : $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$; $\sqrt{6^2} = \sqrt{36} = 6$ et $\sqrt{10^2} = \sqrt{100} = 10$.

2. Opérations sur les racines carrées

1) Produit de deux racines carrées

Pour tout nombres positifs a et b, $\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.

Exemple : *Écrire le produit $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$ sous sa forme la plus simple.*

$\sqrt{3}\times\sqrt{12}=\sqrt{3\times 12}=\sqrt{36}=6$; $\sqrt{23{,}04}=4{,}8$ et $\sqrt{2}\approx 1{,}414$.

2) Quotient de deux racines carrées

Pour tout nombres positifs *a* et *b* $(b\neq 0)$, $\sqrt{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Exemple : *Simplifier les quotients* $\sqrt{\dfrac{81}{49}}$ *et* $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}}$ *sous sa forme la plus simple.*

$\sqrt{\dfrac{81}{49}}=\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{49}}=\dfrac{9}{7}$ et $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}}=\sqrt{\dfrac{21}{27}}=\sqrt{\dfrac{\cancel{3}\times 7}{\cancel{3}\times 9}}=\sqrt{\dfrac{7}{9}}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

3) Extraire une racine carrée « parfaite »

Les racines carrées parfaites sont : $\sqrt{4}=2$; $\sqrt{9}=3$; $\sqrt{16}=4$; $\sqrt{25}=5$; $\sqrt{36}=6$; $\sqrt{49}=7$; $\sqrt{64}=8$; $\sqrt{81}=9$; $\sqrt{100}=10$; etc.

Application : *Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers, b étant le plus petit possible* : $\sqrt{75}$; $3\sqrt{27}$ et $\dfrac{\sqrt{175}}{5}$.

- $\sqrt{75}$ = $\sqrt{3\times 25}$ on fait « apparaître » un carré parfait dans 75

  $\sqrt{3}\times\sqrt{25}$ on extrait cette racine carrée avec la formule

  $\sqrt{3}\times 5$ on simplifie la racine carrée « parfaite »

  Donc $\mathbf{\sqrt{75}=5\sqrt{3}}$

- $3\sqrt{27}$ = $3\times\sqrt{3\times 9}$ on fait « apparaître » un carré parfait dans 27

  $3\times\sqrt{3}\times\sqrt{9}$ on extrait cette racine carrée avec la formule

  $3\times\sqrt{3}\times 3$ on simplifie la racine carrée « parfaite »

  Donc $\mathbf{3\sqrt{27}=9\sqrt{3}}$ on réduit l'expression

- $\dfrac{\sqrt{175}}{5}$ = $\dfrac{\sqrt{7\times 25}}{5}$ on fait « apparaître » un carré parfait dans 175

  $\dfrac{\sqrt{7}\times\sqrt{25}}{5}$ on extrait cette racine carrée avec la formule

  $\dfrac{\sqrt{7}\times 5}{5}$ on simplifie la racine carrée « parfaite »

  $\dfrac{\sqrt{7}\times\cancel{5}}{\cancel{5}}$ on simplifie le quotient

  Donc $\mathbf{\dfrac{\sqrt{175}}{5}=\sqrt{7}}$

ATTENTION ! ! ! $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$. En effet, $\sqrt{16}+\sqrt{9}=7$ et $\sqrt{16+9}=5$