CHAPITRE 1	NOMBRES ENTIERS ET RATIONNELS

Objectifs :

- *Connaître et utiliser un algorithme donnant le PGCD de deux entiers (algorithme des soustractions, algorithme d'Euclide).*
- Calculer le PGCD de deux entiers.
- *Déterminer si deux entiers donnés sont premiers entre eux.*
- Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible.

1. Divisibilité

1) Diviseur d'un entier

Le diviseur d d'un nombre entier a, est un nombre entier tel que, si l'on effectue la division euclidienne de a par d, le reste vaut 0.

Exemple : 180 est divisible par 12 car $180 = 12 \times 15 + 0$

	1	8	0	1	2
–	…	…		…	…
		…	…		
	–	…	…		
			…		

2) Critères de divisibilité

Un nombre entier est divisible :
- par 2, si son chiffre des unités est pair ;
- par 3, si la somme des chiffres qui le composent est divsible par 3 ;
- par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;
- par 9, si la somme des chiffres qui le composent est divsible par 3 ;
- par 10, si son chiffre des unités est 0.

Exemples : 60 est divisible par 2, 3, 5 et 10.
981 est divisible par 3 et par 9.

3) Diviseurs communs à deux entiers

Un diviseur commun à a et b est un nombre entier qui divise a et qui divise b.

Exemple : Les diviseurs de 30 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30.
Les diviseurs de 24 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 24.
Les diseurs communs à 24 et à 30 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 6.

4) PGCD de deux nombres entiers

Parmi les diviseurs communs à a et b, l'un d'eux est plus grand que les autres. On l'appelle le Plus Grand Commun Diviseur (en abrégé PGCD) ; on le note parfois PGCD (a ; b).

Exemple : Les diviseurs de 8 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 8.
Les diviseurs de 12 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 12.
Les diviseurs communs à 8 et 12 sont : 1 ; 2 ; 4. Par conqéquent, PGCD (8 ; 12) = 4.

Remarque : Si a et b sont deux entiers naturels tels que b divise a, alors PGCD(a ; b) = b.

2. Algorithmes de calcul du PGCD de deux nombres entiers

1) Algorithme d'Euclide

Propriété : **r est le reste de la division euclidienne de a par b (avec $b < a$).
Alors : PGCD (a ; b) = PGCD (b ; r).**

Pour calculer le PGCD de a et b (avec $b < a$) on utilise la séquence ordonnée d'opérations décrites ci-dessous :

(1) Diviser a par b ; obtenir le reste r.
(2) Si $r = 0$, alors l'algorithme se termine : PGCD (a ; b) = b.
(3) Si $r \neq 0$, remplacer a par b, b par r et recommencer à partir de (1).

Exemple : Calculons le PGCD de 1078 et 322 avec l'algorithme d'Euclide.

Étapes	a	b	Restes	
1	1 078	322	112	1 078 = 3 × 322 + 112
2	322	112	98	322 = 2 × 112 + 98
3	112	98	14	112 = 1 × 98 + 14
4	98	**14**	0	98 = 7 × 14 + 0

L'algorithme d'Euclide s'arrête lorsqu'on trouve un reste nul. Alors **le PGCD de a et de b est le dernier reste non nul trouvé**.
Ici donc, le PGCD de 1078 et 322 est 14.
PGCD (1078 ; 322) = PGCD (322 ; 112) = PGCD (112 ; 98) = PGCD (98 ; 14) = 14.

2) Méthode des soustractions successives

Propriété : *Soient a et b deux entiers naturels tels que $a \geq b$.*
Alors : PGCD (a ; b) = PGCD (b ; $a-b$).

Exemple : Calculons le PGCD de 1078 et 322 avec cette méthode.

$1078 > 322$ et $1078 - 322 = 756$ alors PGCD (1078 ; 322) = PGCD (322 ; 756).

On cherche maintenant PGCD (322 ; 756) en appliquant la même propriété :

$756 > 322$ et $756 - 322 = 434$ alors PGCD (322 ; 756) = PGCD (322 ; 434).

On répète le même procédé avec 322 et 434, et ainsi de suite :

$434 > 322$ et $434 - 322 = 112$ alors PGCD (322 ; 434) = PGCD (322 ; 112).
$322 > 112$ et $322 - 112 = 210$ alors PGCD (322 ; 112) = PGCD (112 ; 210).
$210 > 112$ et $210 - 112 = 98$ alors PGCD (112 ; 210) = PGCD (112 ; 98).
$112 > 98$ et $112 - 98 = 14$ alors PGCD (112 ; 98) = PGCD (14 ; 98).
Or $98 = 14 \times 7$, d'où : PGCD (14 ; 98) = 14.
Par conséquent, le PGCD de 1078 et 322 est 14.

3. Nombres premiers entre eux

Deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1.

Exemples : 2 et 3 sont premiers entre eux.
2 et 4 ne sont pas premiers entre eux.

4. Fractions irréductibles

1) Définition d'une fraction irréductible

Une fraction est irréductible lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Exemple : La fraction $\frac{2}{3}$ est irréductible. En effet, PGCD (2 ; 3) = 1.

2) Rendre une fraction irréductible

Pour rendre une fraction irréductible, il faut la simplifier par le PGCD de son numérateur et de son dénminateur.

Exemple : Simplifier la fraction $\frac{1078}{322}$ pour la rendre irréductible.

D'après l'exemple du ***1)*** du **2.**, le PGCD de 1078 et 322 est 14.

D'où : $\frac{1078}{322} = \frac{77 \times 14}{23 \times 14} = \frac{774}{23}$.