

INÉQUATIONS

Objectifs :

- Résoudre une inéquation du premier degré à une inconnue à coefficients numériques ; représenter ses solutions sur une droite graduée.

1. Ordre et opérations

1) Effet de l'addition et de la soustraction

Si on additionne ou si on soustrait un MÊME nombre aux deux membres d'une inégalité, alors le sens de l'inégalité est INCHANGÉ.

Exemples :

On sait que $x \leq 11$.

En déduire une inégalité vérifiée par $x + 7$:

$$\begin{aligned}x &\leq 11 \\x + 7 &\leq 11 + 7 \\x + 7 &\leq 18\end{aligned}$$

On sait que $x + \frac{5}{3} \geq -\frac{5}{6}$.

En déduire une inégalité vérifiée par x :

$$\begin{aligned}x + \frac{5}{3} - \frac{5}{3} &\geq -\frac{5}{6} - \frac{5}{3} \\x &\geq -\frac{10}{12} - \frac{20}{12} \\x &\geq -\frac{30}{12} \text{ ou encore } x \geq -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

On sait que $-6,24 \leq x \leq -6,23$.

En déduire un encadrement de $x + 5$:

$$\begin{aligned}-6,24 &\leq x \leq -6,23 \\-6,24 + 5 &\leq x + 5 \leq -6,23 + 5 \\-1,24 &\leq x + 5 \leq -1,23\end{aligned}$$

On sait que $3,141592 \leq \pi \leq 3,141593$.

En déduire un encadrement de $\pi - 3$:

$$\begin{aligned}3,141592 &\leq \pi \leq 3,141593 \\3,141592 - 3 &\leq \pi - 3 \leq 3,141593 - 3 \\0,141592 &\leq \pi - 3 \leq 0,141593\end{aligned}$$

2) Effet de la multiplication et de la division

Si on multiplie ou si on divise par un MÊME nombre non nul les deux membres d'une inégalité alors :

- si ce nombre est positif alors le sens de l'inégalité est inchangé ;
- si ce nombre est NÉGATIF alors le sens de l'inégalité est INVERSÉ.

Exemples :

On sait que $x \leq 11$.

En déduire une inégalité vérifiée par $3x$:

$$x \leq 11$$

On sait que $3,141592 \leq \pi \leq 3,141593$.

En déduire un encadrement de 2π :

$$3,141592 \leq \pi \leq 3,141593$$

$$x \times 3 \leq 11 \times 3$$

$$3x \leq 33$$

$$3,141592 \times 2 \leq \pi \times 2 \leq 3,141593 \times 2$$

$$6,283184 \leq 2\pi \leq 6,283186$$

On sait que $x \leq 11$.

En déduire une inégalité vérifiée par $-5x$:

$$x \leq 11$$

$$x \times (-5) \leq 11 \times (-5)$$

$$-5x \geq -55$$

On sait que $3,141592 \leq \pi \leq 3,141593$.

En déduire un encadrement de -2π :

$$3,141592 \leq \pi \leq 3,141593$$

$$3,141592 \times (-2) \geq \pi \times (-2) \geq 3,141593 \times (-2)$$

$$-6,283184 \geq 2\pi \geq -6,283186$$

2. Inéquations du premier degré

1) Définition

Une inéquation est une inégalité dans laquelle intervient un nombre inconnu, représenté par une lettre, appelée inconnue de l'inéquation.

Une solution de cette inéquation est une valeur de l'inconnue pour laquelle l'inégalité est vraie.

Résoudre une inéquation, c'est en trouver toutes les solutions.

Exemple : $2x - 5 > 1$ est une inéquation, dont le **premier membre** (ce qui est à gauche du signe $>$) est $2x - 5$, et dont le **second membre** (ce qui est à droite du signe $>$, donc) est 1.

- 4 est une solution de l'inéquation $2x - 5 > 1$
car, lorsque je remplace l'inconnue x par 4 dans l'inéquation, l'inégalité est vérifiée :
 $2 \times 4 - 5 = 8 - 5 = 3$ et $3 > 1$
- 10 est une autre solution de l'inéquation $2x - 5 > 1$
car, lorsque je remplace l'inconnue x par 10 dans l'inéquation, l'inégalité est vérifiée :
 $2 \times 10 - 5 = 20 - 5 = 15$ et $15 > 1$
- 0 n'est pas une solution de l'inéquation $2x - 5 > 1$
car, lorsque je remplace x par 0, l'inégalité n'est pas vérifiée :
 $2 \times 0 - 5 = 0 - 5 = -5$ et $-5 < 1$

2) Résolution d'une inéquation

Exemple 1 : Résoudre l'inéquation : $2x - 5 > 1$.

On ajoute 5 aux deux membres de l'inéquation
(le sens de l'inégalité est conservé)

$$2x - 5 + 5 > 1 + 5$$

On obtient :

$$2x > 6$$

On divise par 2 chaque membre de l'inéquation
(le sens de l'inégalité est conservé)

$$\frac{2x}{2} > \frac{6}{2}$$

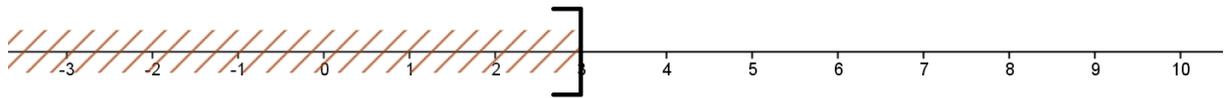
On obtient :

$$x > 3$$

On conclut par une phrase :

l'inéquation $2x - 5 > 1$ admet pour solutions les nombres strictement supérieurs à 3.

On peut représenter l'ensemble des solutions sur un axe, en hachurant la partie de la droite graduée constituée des nombres qui ne sont pas solutions :



⚠ **Attention au sens du crochet !** Le crochet n'est pas tourné vers les solutions, car 3 n'est pas solution de l'inéquation $2x - 5 > 1$.

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation : $3 - 5x > -2x + 9$.

On ajoute $2x$ aux deux membres de l'inéquation
(le sens de l'inégalité est conservé)

$$3 - 5x + 2x > -2x + 9 + 2x$$

On obtient :

$$3 - 3x > 9$$

On soustrait 3 à chaque membre de l'inéquation
(le sens de l'inégalité est conservé)

$$3 - 3x - 3 > 9 - 3$$

On obtient :

$$-3x > 6$$

On divise par -3 chaque membre de l'inéquation
(le sens de l'inégalité est inversé)

$$\frac{-3x}{-3} < \frac{6}{-3}$$

On obtient :

$$x < -2$$

On conclut par une phrase :

l'inéquation $3 - 5x > -2x + 9$ admet pour solutions les nombres strictement inférieurs à -2 .

On peut représenter l'ensemble des solutions sur un axe, en hachurant la partie de la droite graduée constituée des nombres qui ne sont pas solutions :

