

FONCTIONS LINÉAIRES

Objectifs :

- Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.
- Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image.
- Représenter graphiquement une fonction linéaire.
- Connaître et utiliser la relation $y = ax$ entre les coordonnées (x, y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire $x \rightarrow ax$.
- Lire et interpréter graphiquement le coefficient d'une fonction linéaire représentée par une droite.

1. Proportionnalité et fonction linéaire

Définition : Dans un tableau, deux quantités X et Y sont dites proportionnelles lorsqu'il existe un nombre a , non nul, tel que $Y = a \times X$.

Le nombre a est appelé coefficient de proportionnalité.

À chaque situation de proportionnalité correspond une fonction f définie par $f : x \mapsto a \times x$.

On dit alors que cette fonction modélise la situation de proportionnalité.

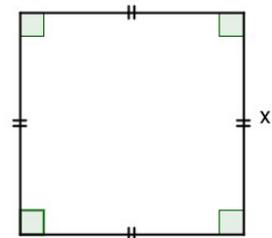
Exemple :

On considère le carré de côté x ci-contre.

Le périmètre du carré est proportionnel à la longueur de son côté et le coefficient de proportionnalité est 4 :

Longueur du côté (en cm)	8	12	20
Périmètre (en cm)	2	3	5

→ $\times 4$



La fonction \mathcal{P} qui modélise cette situation de proportionnalité est définie par : $\mathcal{P}(x) = 4x$ (ou $\mathcal{P} : x \mapsto 4x$).

Remarque :

Dans cette situation x et $\mathcal{P}(x)$ sont positifs car ce sont des longueurs, mais on peut pourtant calculer $\mathcal{P}(-7)$. Cela montre que la fonction est la généralisation de la situation de proportionnalité.

2. Définition

Définition : On appelle fonction linéaire de coefficient a toute fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre $a \times x$ (c'est-à-dire $x \mapsto a \times x$) où a est un nombre « fixe ».

Exemple : Soit x la longueur du côté d'un carré et \mathcal{P} son périmètre. On obtient : $\mathcal{P} = 4x$. La fonction qui, à chaque nombre x associe le périmètre du carré de côté x est **une fonction linéaire de coefficient 4**. On peut noter cette fonction : $f : x \mapsto 4x$. L'image de 5,6 par cette fonction est 22,4 ; ce que l'on peut noter : $f(5,6) = 22,4$.

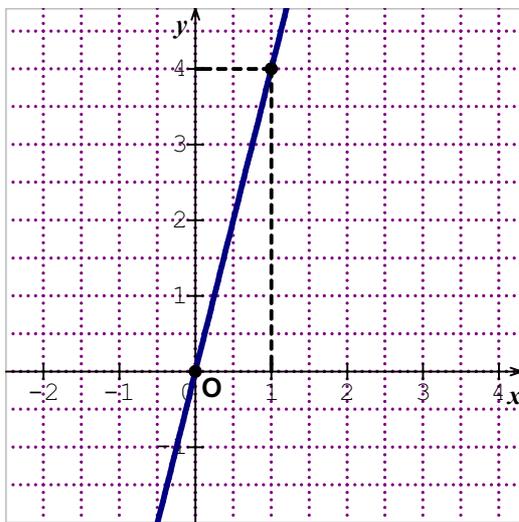
Remarque : Pour passer d'un nombre à son image, on **multiplie par a** . Ce nombre a est aussi appelé « coefficient de linéarité ».

3. Représentation graphique d'une fonction linéaire

Propriété : Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction linéaire de coefficient a est une droite passant par l'origine du repère.

La représentation graphique de la fonction linéaire de coefficient a est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x ; ax)$.

1) Représenter graphiquement une fonction linéaire



Ci-contre est représentée graphiquement la fonction linéaire f de coefficient 4, que l'on peut noter $f : x \mapsto 4x$.

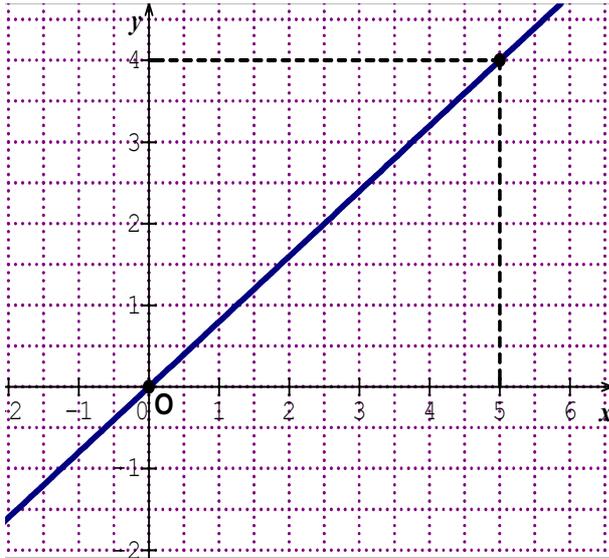
Comme f est une fonction linéaire, sa représentation graphique est **une droite qui passe par l'origine du repère**.

De plus, pour trouver un second point de cette droite, on peut calculer l'image de 1 :

$$f(1) = 1 \times 4.$$

On place le point de coordonnées **(1 ; 4)**.

2) Déterminer l'expression algébrique d'une fonction linéaire à partir de la donnée d'un nombre non nul et de son image



Dans l'exemple ci-contre, on considère une fonction linéaire de coefficient a inconnu, que l'on note $f : x \mapsto ax$.

Comme le point de coordonnées $(5 ; 4)$ appartient à la droite, alors l'image de 5 par cette fonction est égale à 4 ; cela signifie que $4 = 5a$.

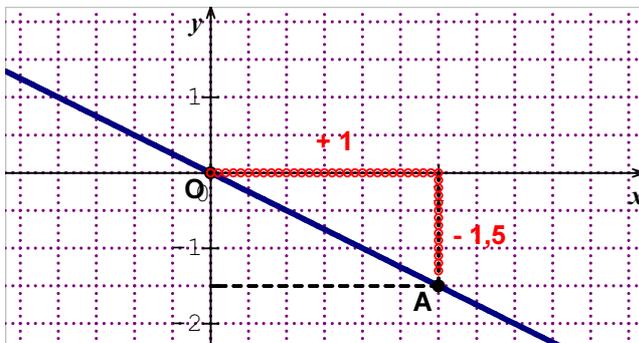
Par suite, $a = \frac{4}{5} = 0,8$.

On en déduit que $f : x \mapsto \frac{4}{5}x$.

Définition : Soit (d) la droite qui représente graphiquement la fonction linéaire de coefficient a .

On dit alors que a est le coefficient directeur de la droite (d) et que $y = ax$ est une équation de la droite (d) .

3) Lire et interpréter graphiquement le coefficient d'une fonction linéaire représentée par une droite



Soit (d) la droite qui représente graphiquement une fonction linéaire.

Cherchons graphiquement son coefficient directeur : pour aller du point O vers le point A , on va d'une unité vers la droite et de 1,5 unité vers le bas.

Le coefficient directeur de la droite (d) est donc $-1,5$, et son équation est $y = -1,5x$.

4. Fonction linéaire et pourcentages

- Prendre $t\%$ d'un nombre, c'est multiplier ce nombre par $\frac{t}{100}$.
- Augmenter un nombre de $t\%$, c'est multiplier ce nombre par $\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.
- Diminuer un nombre de $t\%$, c'est multiplier ce nombre par $\left(1 - \frac{t}{100}\right)$.

Exemples :

	Prendre 5 % de x c'est multiplier x par 0,05	Augmenter x de 5 % c'est multiplier x par 1,05	Diminuer x de 5 % c'est multiplier x par 0,95
Expression algébrique	$\frac{5}{100}x = 0,05x$	$x + \frac{5}{100}x = \left(1 + \frac{5}{100}\right)x$ $= 1,05x$	$x - \frac{5}{100}x = \left(1 - \frac{5}{100}\right)x$ $= 0,95x$
Fonction linéaire	$x \mapsto 0,05x$ (coefficient 0,05)	$x \mapsto 1,05x$ (coefficient 1,05)	$x \mapsto 0,95x$ (coefficient 0,95)