

FONCTIONS AFFINES

Objectifs :

- Déterminer par le calcul l'image d'un nombre donné et l'antécédent d'un nombre donné.
- Connaître et utiliser la relation $y = ax + b$ entre les coordonnées (x, y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire $x \rightarrow ax + b$.
- Déterminer une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images.
- Représenter graphiquement une fonction affine.
- Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite.
- Déterminer la fonction affine associée à une droite donnée dans un repère.

1. Définition

Définition : On appelle fonction affine toute fonction qui, à tout nombre noté x , associe le nombre $a \times x + b$ (c'est-à-dire $x \mapsto a \times x + b$) où a et b sont des nombres « fixes ».

Exemple : La fonction qui, à chaque nombre x associe le nombre $3x + 4$ est une fonction affine avec $a = 3$ et $b = 4$. On peut noter cette fonction : $f : x \mapsto 3x + 4$.

L'image de 2 par cette fonction est 10 car $3 \times 2 + 4 = 10$; ce que l'on peut noter : $f(2) = 10$.

Remarques : • Pour passer d'un nombre à son image, on multiplie par a , puis on ajoute b .

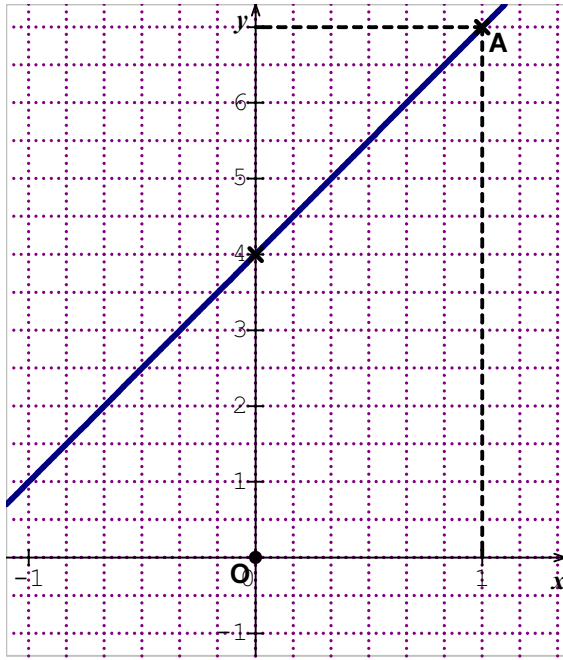
- Lorsque $b = 0$, on obtient la fonction linéaire $x \mapsto ax$.

2. Représentation graphique d'une fonction affine

Propriété : Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui passe par le point de coordonnées $(0 ; b)$.

La représentation graphique de la fonction linéaire de coefficient a est l'ensemble de tous les points de coordonnées $(x ; ax + b)$.

1) Représenter graphiquement une fonction affine



Soit f la fonction affine définie par $f(x) = 3x + 4$.

Comme f est une fonction affine, sa représentation graphique est **une droite qui passe par** le point de coordonnées $(0 ; 4)$.

De plus, pour trouver un second point de cette droite, on peut calculer l'image de 1 :

$$f(1) = 3 \times 1 + 4 = 7.$$

On place **le point de coordonnées $(1 ; 7)$** .

2) Déterminer l'expression algébrique d'une fonction affine à partir de la donnée de deux nombres et de leurs images

Définition : Soit (d) la droite qui représente graphiquement la fonction affine $f : x \mapsto a \times x + b$.

On dit alors que a est le coefficient directeur de la droite (d) , que b est l'ordonnée à l'origine et que $y = ax + b$ est une équation de la droite (d) .

Exemple : Déterminer la fonction affine f telle que $f(1) = 3$ et $f(2) = 5$.

Comme f est une fonction affine, alors elle s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b$.

Or $f(1) = 3$, d'où $a \times 1 + b = 3$, c'est-à-dire $a + b = 3$ (égalité 1).

De plus, $f(2) = 5$, d'où $a \times 2 + b = 5$, c'est-à-dire $2a + b = 5$ (égalité 2).

Recherche de a : On **soustrait membre à membre** les deux égalités trouvées ci-dessus, on obtient : $(a + b) - (2a + b) = 3 - 5$.

Par suite, $a + b - 2a - b = -2$; ce qui entraîne que $-a = -2$.

On en déduit que $a = \frac{-2}{-1} = 2$.

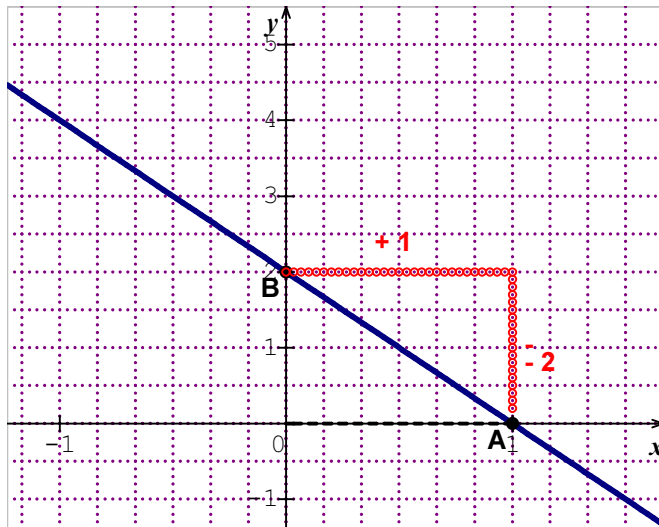
Recherche de b : On reprend l'une des deux égalités (égalité 1 ou égalité 2), et on remplace a par la valeur trouvée, pour calculer la valeur de b .

Dans l'égalité 1, remplaçons a par 2 ; on obtient : $1 + b = 3$.

On en déduit que $b = 3 - 1 = 2$.

Donc, la fonction affine, qui vérifie $f(1) = 3$ et $f(2) = 5$, est la fonction $f : x \mapsto 2x + 2$.

3) Lire et interpréter graphiquement les coefficients d'une fonction affine représentée par une droite



Soit (d) la droite qui représente graphiquement une fonction affine.

Cherchons son ordonnée à l'origine : comme la droite passe par le point de coordonnées $(0 ; 2)$, alors l'ordonnée à l'origine est 2.

Cherchons graphiquement son coefficient directeur : pour aller du point B vers le point A , on va d'une unité vers la droite et de 2 unités vers le bas. Le coefficient directeur de la droite (d) est donc -2 .

Donc une équation de (d) est $y = -2x + 2$.

3. Proportionnalité des accroissements de x et de y

Une fonction linéaire modélise une situation de proportionnalité ; ce n'est pas le cas d'une fonction affine, comme on peut s'en convaincre en observant le tableau de valeurs de la fonction $f : x \mapsto 1,4x + 2,2$, vue dans l'activité.

Cependant, regardons ce qui se passe lorsque l'on regarde les accroissements de cette fonction :

Lorsque x augmente de	1	2	3	4
alors $f(x)$ augmente de	1,40	2,80	4,20	5,60

Ce tableau est un tableau de proportionnalité, et le coefficient de proportionnalité est 1,40. Ceci nous amène à énoncer la propriété suivante :

Soit la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$.

Les accroissements des valeurs de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements des valeurs de x , et le coefficient de proportionnalité est a .

Autrement dit, pour tous nombres x_1 et x_2 distincts, $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$.

Application : Déterminer la fonction affine telle que $f(3) = 9$ et $f(-2) = -1$.

Comme f est une fonction affine, alors elle s'écrit sous la forme $f(x) = ax + b$.

Recherche de a : Comme on sait que les accroissements de $f(x)$ sont proportionnels aux accroissements de x , et que le coefficient de proportionnalité est a , on peut écrire que

$$a = \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)} = \frac{9 - (-1)}{3 + (+2)} = \frac{9 + (+1)}{5} = \frac{10}{5} = 2.$$

Recherche de b : Comme $f(3) = 9$, d'où $a \times 3 + b = 9$.

Or $a = 2$; d'où : $2 \times 3 + b = 9$, c'est-à-dire $6 + b = 9$. On en déduit que $b = 9 - 6 = 3$.

Donc, la fonction affine, qui vérifie $f(3) = 9$ et $f(-2) = -1$, est la fonction $f : x \mapsto 2x + 3$.