

CALCUL LITTÉRAL

Objectifs :

- Factoriser des expressions algébriques dans lesquelles le facteur est apparent.
- Connaître les identités :
 $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
 $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- Les utiliser dans les deux sens sur des exemples numériques ou littéraux simples.

1. Distributivité, double distributivité et identités remarquables

1) Rappels

Si a, b et k sont trois nombres :

$$k \times (a + b) = k \times a + k \times b$$

$$k \times (a - b) = k \times a - k \times b$$

Si a, b, c et d sont quatre nombres :

$$(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d$$

Exemples :

- $5 \times (4 + 2) = 5 \times 4 + 5 \times 2 = 20 + 10 = 30$
- $6 \times (8 - 3) = 6 \times 8 - 6 \times 3 = 48 - 18 = 30$
- $(x + 3)(x + 5) = x \times x + x \times 5 + 3 \times x + 3 \times 5$
 $= x^2 + 5x + 3x + 15$
 $= 6x^2 + 8x + 15$

2) Identités remarquables

Si a et b sont deux nombres :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

2. Développements et réductions

1) Définitions

Une expression littérale est développée si, en appliquant des formules (distributivité, identité remarquable..) elle ne contient plus de parenthèses.

Réduire une expression littérale revient à effectuer la somme algébrique des termes "de même nature", afin d'écrire cette expression avec le moins de termes possibles.

2) Exemples

Développer et réduire les expressions suivantes :

a) $-(5 - 2x)$;

b) $2(2 - 3x)$;

c) $-3x(2x + 3)$;

d) $3x(x - 5) - (7 - 2x)$;

e) $(3x + 1)(2x - 5)$;

f) $(x + 5)^2$:

g) $(2 - 5x)^2$:

h) $(2x + 1)(2x - 1)$;

i) $(x - 3)(x + 3) - (2 - 5x)^2$.

a) $-(5 - 2x) = -5 + 2x$

b) $2(2 - 3x) = 2 \times 2 - 2 \times 3x = 4 - 6x$

c) $-3x(2x + 3) = (-3x) \times 2x + (-3x) \times 3 = -6x^2 - 9x$

d) $3x(x - 5) - (7 - 2x) = 3x \times x - 3x \times 5 - 7 + 2x = 3x^2 - 15x + 2x - 7 = 3x^2 - 13x - 7$

e) $(3x + 1)(2x - 5) = 3x \times 2x - 3x \times 5 + 1 \times 2x - 1 \times 5 = 6x^2 - 15x + 2x - 5 = 6x^2 - 13x - 5$

f) $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

g) $(2 - 5x)^2 = 2^2 - 2 \times 2 \times 5x + (5x)^2 = 4 - 20x + 5^2 \times x^2 = 4 - 20x + 25x^2$

h) $(2x + 1)(2x - 1) = (2x)^2 - 1^2 = 2^2 \times x^2 - 1 = 4x^2 - 1$

i) $(x - 3)(x + 3) - (2 - 5x)^2 = (x^2 - 3^2) - (4 - 20x + 25x^2) = x^2 - 9 - 4 + 20x - 25x^2$
 $= -24x^2 + 20x - 13$

3. Factorisations

1) Définitions

Factoriser une expression, c'est transformer une somme ou une différence en un produit.

2) Exemples

Factoriser les expressions suivantes :

a) $4t - 7tx + 5t$;

b) $2(x - 2) - (x - 2)(x + 3)$;

c) $(1 - x^2) - (1 - x)(2 + 3x)$;

d) $9x^2 - 16$;

e) $x^2 - 2x + 1$;

f) $x^2 + 8x + 16$;

$$\text{a) } 4\boxed{t} - 7\boxed{t}x + 5\boxed{t} = \boxed{t}(4 - 7x + 5) = t(9 - 7x)$$

$$\text{b) } 2\boxed{(x-2)} - \boxed{(x-2)}(x+3) = \boxed{(x-2)}[2 - (x+3)] = (x-2)[2-x-3] = (x-2)(-x-1)$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (1-x)^2 - (1-x)(2+3x) &= \boxed{(1-x)}(1-x) - \boxed{(1-x)}(2+3x) = \boxed{(1-x)}[(1-x) - (2+3x)] \\ (1-x)^2 - (1-x)(2+3x) &= (1-x)[1-x-2-3x] = (1-x)(-4x-1) \end{aligned}$$

$$\text{d) } 9x^2 - 16 = (3x)^2 - 4^2 = (3x+4)(3x-4)$$

$$\text{e) } x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2 = (x-1)^2$$

$$\text{f) } x^2 + 2x + 16 = x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2 = (x+4)^2$$