

VARIABLES ALEATOIRES

Objectifs :

- Interpréter en situation les écritures $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$ où X désigne une variable aléatoire et calculer les probabilités correspondantes $P(X = a)$, $P(X \leq a)$.
- Calculer et interpréter en contexte l'espérance d'une variable aléatoire discrète.

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 **et on note** le nombre figurant sur la face supérieure du dé.

L'ensemble de toutes les issues possibles $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ s'appelle l'univers des possibles.

Reprenons l'expérience précédente, on considère le jeu suivant :

- Si le résultat est 1, 2 ou 3, on gagne 1 €.
- Si le résultat est 4, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 5 ou 6, on perd 2 €.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$ qui peut prendre les valeurs 1, 3 ou -2. On note $X(\Omega) = \{-2 ; 1 ; 3\}$.

Définition 1. Variable aléatoire

**Soit Ω l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.
On appelle variable aléatoire toute fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$ qui, à tout élément de Ω , fait correspondre un nombre réel x .**

2) Loi de probabilité

On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

Chaque issue du lancer de dé est équiprobable, de probabilité $\frac{1}{6}$.

La probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 1 est donc $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

On écrit $p(X = 1) = \frac{1}{2}$. De même, on obtient : $p(X = 3) = \frac{1}{6}$ et

$$p(X = -2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$

On présente souvent la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous la forme d'un tableau

x_i	-2	1	3
$p(X = x_i)$			

Définition 2. Loi de probabilité

Définir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est :

- faire une partition de l'univers Ω avec les événements constitué par les différentes issues possibles de l'expérience : $x_1, x_2, \dots, x_n$,
- déterminer les probabilités de chacun de ces événements : $p_1, p_2, \dots, p_n$,
- consigner ces résultats dans un tableau tel que celui-ci :

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Remarque : On obtient : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = \dots$

Exemple : Reprenons l'exemple précédent. Calculer $p(X \geq 1)$, et interpréter le résultat.

$p(X \geq 1) = p(X = \dots) + p(X = \dots) = \dots + \dots = \dots + \dots = \dots = \dots$; donc la probabilité de gagner une somme supérieure ou égal à 1 € est égale à

2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition 3. Espérance mathématique

On appelle espérance mathématique de X et on note $E(X)$ le nombre

$$E(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n.$$

L'espérance mathématique s'interprète comme la valeur moyenne obtenue lorsque le nombre de simulations de l'expérience aléatoire devient « grand ».

Exemple : Reprenons l'exemple du paragraphe précédent.

$$E(X) = \dots \times \dots + \dots \times \dots + \dots \times \dots = \dots = \dots$$

L'espérance peut s'interpréter en disant que, si l'on joue « un très grand nombre de fois », le gain moyen que l'on peut « espérer » est de €, c'est-à-dire environ €.

Lorsque $E(X) = 0$, le jeu est dit

Ici, $E(X) \dots 0$ donc le jeu est au joueur.

Exercice ❶

Un sac contient les jetons numérotés ci-dessous.



On pioche au hasard un jeton du sac.

Un jeu est organisé ainsi : pour une mise de trois euros, on gagne autant d'euros qu'indiqué sur le jeton.

On définit la variable aléatoire X qui lui associe le bénéfice d'un joueur.

- 1) Montrer que X prend des valeurs comprises entre -2 et 3 .
- 2) Déterminer la loi de probabilité de X .
- 3) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.



[corrigé en vidéo](#)

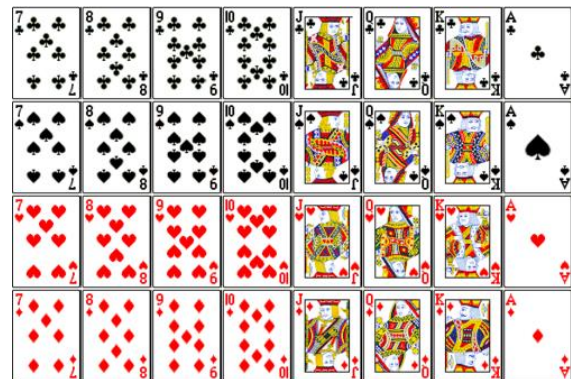
Exercice ❷

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

- Si on tire un cœur, on gagne 2 € ;
- Si on tire un roi, on gagne 5 € ;
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

Soit X la variable aléatoire donnant le gain du jeu.

Calculer l'espérance de X .



[corrigé en vidéo](#)