

LOI DE BERNOULLI

Objectifs :

- Représenter par un arbre de probabilités une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes et déterminer les probabilités des événements associés aux différents chemins.
- Représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli avec $n \leq 4$ afin de calculer des probabilités.
- Reconnaître une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.

1. Expériences aléatoires à deux épreuves indépendantes

Définition 1. Expériences aléatoires indépendantes

Deux expériences sont dites indépendantes si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

Application ❶

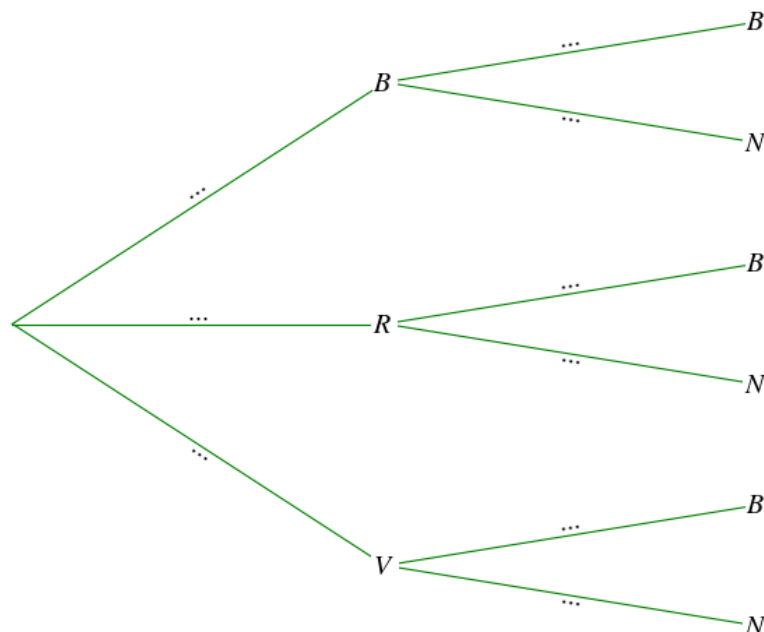
Jade tente l'expérience suivante avec ses vêtements.

Elle dépose dans un panier 4 chemisiers indiscernables au toucher : 1 blanc, 1 rouge et 2 verts. Dans un autre panier, elle y dépose 2 jupes également indiscernables au toucher : 1 blanche et 1 noire.

Elle tire successivement et au hasard, un chemisier du premier panier et une jupe du deuxième panier.

Ces deux expériences, « tirer un vêtement dans chaque panier », sont dites indépendantes.

1) Compléter l'arbre pondéré suivant.



2) Calculer la probabilité p_1 d'obtenir deux vêtements blancs.

Règle 1. *Arbre pondéré*

La probabilité d'une liste de plusieurs événements, représentées par un chemin de l'arbre, est égale au produit des probabilités indiquées sur les branches.

3) Calculer la probabilité p_2 de ne pas obtenir un chemisier vert et d'obtenir une jupe noire.

Règle 2. *Arbre pondéré*

La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

2. Loi de Bernoulli



Jacques ou Jakob Bernoulli ([1654](#) - [1705](#)) est un mathématicien et physicien suisse.

Il fut un des premiers à comprendre et à appliquer le calcul différentiel et intégral, proposé par Leibniz, découvrit les propriétés des nombres dits depuis [nombres de Bernoulli](#) et donna la solution de problèmes regardés jusque-là comme insolubles. En 1689, il publie un important travail sur les [séries infinies](#) et sa [loi des grands nombres](#) dans la théorie des probabilités.

Définition 2. *Épreuve de Bernoulli*

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ne comportant que deux issues ; on nomme l'une de ces issues « succès », que l'on note S , et l'autre « échec », que l'on note $\bar{S}$.

Exemple : On lance un dé et on considère par exemple comme succès "obtenir un six" et comme échec "ne pas obtenir un six".

Définition 3. *Épreuve de Bernoulli*

On dit qu'une épreuve de Bernoulli est de paramètre p , où $p \in [0 ; 1]$, si la probabilité du succès S est égale à p .

La probabilité de l'échec $\bar{S}$ est donc égale à $1 - p$.

Exemple : Dans l'exemple précédent, $p = \frac{1}{6}$.

Définition 4. Loi de Bernoulli

Dans une épreuve de Bernoulli de paramètre p , où $p \in [0 ; 1]$, notons X la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. La loi de probabilité de la variable aléatoire X est indiquée dans le tableau suivant :

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1 - p$	p

On dit que la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

Application 2

Après la correction d'un contrôle, le professeur compte que 18 élèves ont obtenu une note supérieure ou égale à 10, et 9 ne l'ont pas obtenue.

Le professeur choisit une copie au hasard. Justifier que cette situation peut être modélisée par une loi de Bernoulli.

Propriété. Espérance mathématique d'une loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

On a : $E(X) = p$.

3. Schéma de Bernoulli

Définition 5. Schéma de Bernoulli

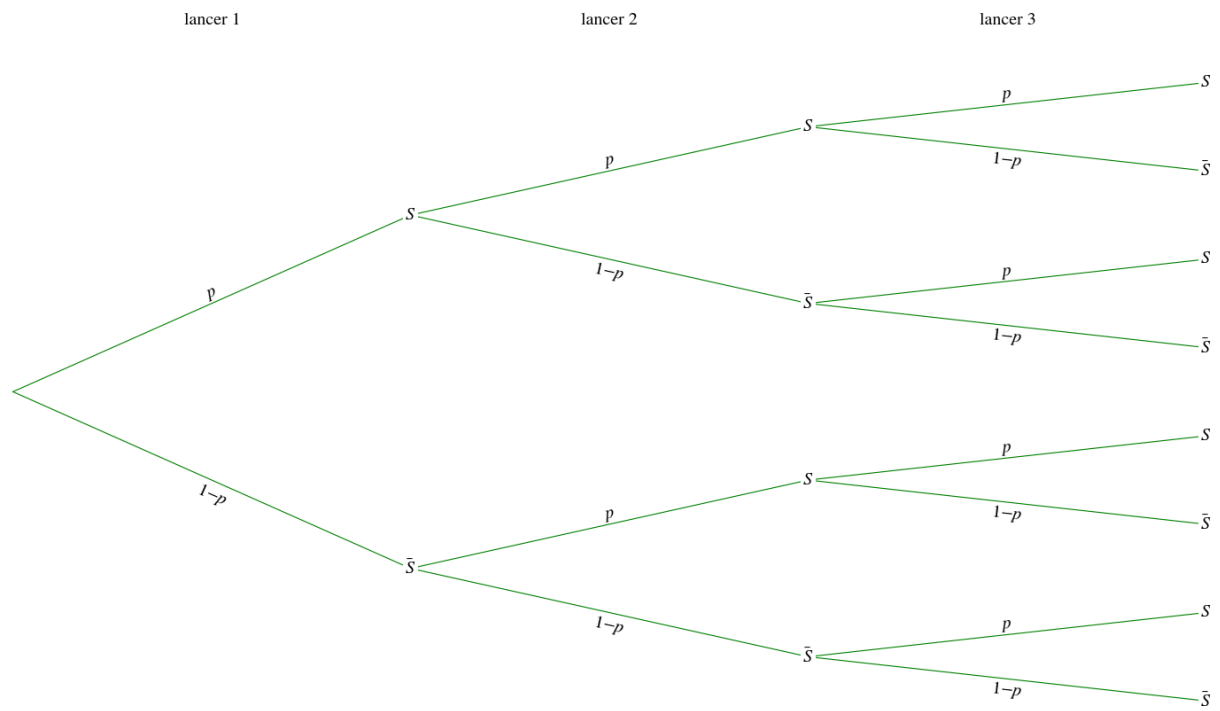
Soit n un entier naturel non nul et p un nombre réel appartenant à $[0 ; 1]$.

On appelle schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p toute expérience aléatoire qui consiste en la répétition de n épreuves de Bernoulli (de paramètre p) identiques et indépendantes.

Exemple : Soit l'expérience aléatoire qui consiste à lancer trois fois de suite un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On s'intéresse au nombre d'apparitions du numéro 6 au terme de ces trois lancers.

Cette expérience est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 3$ et $p = \frac{1}{6}$.

En effet, on répète trois fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$, égale à la probabilité d'obtention du chiffre 6 lors d'un lancer du dé.



On obtient par exemple : $p(S,S,S) = p \times p \times p = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$