FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 3

Objectifs :

- *Représentations graphiques des fonctions :* $x \mapsto ax^3$, $x \mapsto a\,x^3 + b$, $x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
- *Équation* $x^3 = c$ *; racine cubique d'un nombre réel positif ; notations* $c^{\frac{1}{3}}$ *et* $\sqrt[3]{c}$.

1. Définition

Définition 1.

On appelle fonction polynôme de degré 3 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et qui s'écrit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ où a, b, c et d sont des réels fixés et $a \neq 0$.

Exemples : Les fonctions $x \mapsto 3x^3$, $x \mapsto 7x^3 + 2$ et $x \mapsto 3x^3 + 7x - 1$ sont des fonctions polynômes de degré 3.

2. Représentation graphique et variations

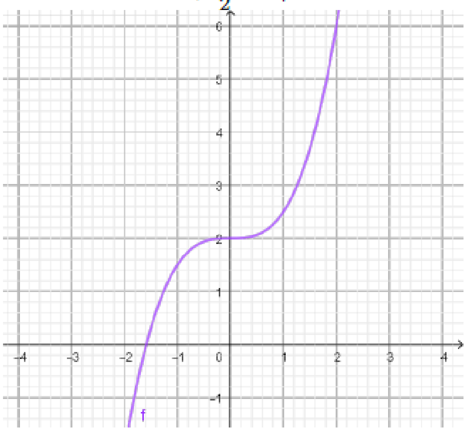
Propriété 1. ***Variations***

Soit f une fonction de degré 3 définie par $f : x \mapsto ax^3 + b$ où a et b sont des réels

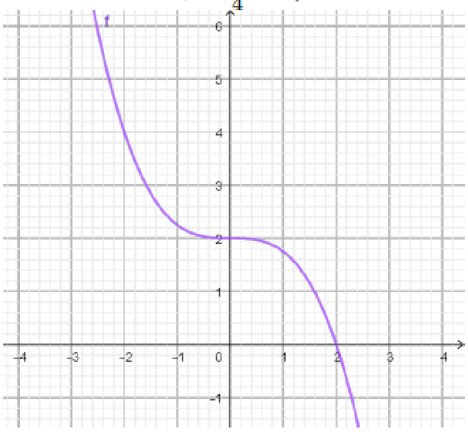
- **Si $a > 0$, f est croissante sur $\mathbb{R}$.**
- **Si $a < 0$, f est décroissante sur $\mathbb{R}$.**

Exemples :

$x \mapsto \frac{1}{2}x^3 + 2$



$x \mapsto -\frac{1}{4}x^3 + 2$



3. Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 3

Propriété 2. *Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 3*

Soient a, x_1, x_2 et x_3 des réels.
La fonction f définie par $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ est une fonction polynôme de degré 3. L'écriture $a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ est la forme factorisée de cette fonction.

Exemple : $5(x-4)(x-1)(x+3)$ est la forme factorisée de $5x^3-10x^2-55x+60$

4. Signe d'une fonction polynôme de degré 3

Propriété 3. *Racines d'un polynôme de degré 3*

Si f est une fonction polynôme de degré 3 de forme factorisée $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, alors l'équation $f(x)=0$ admet pour unique solutions x_1, x_2 et x_3. On dit que le polynôme f admet pour racines x_1, x_2 et x_3.

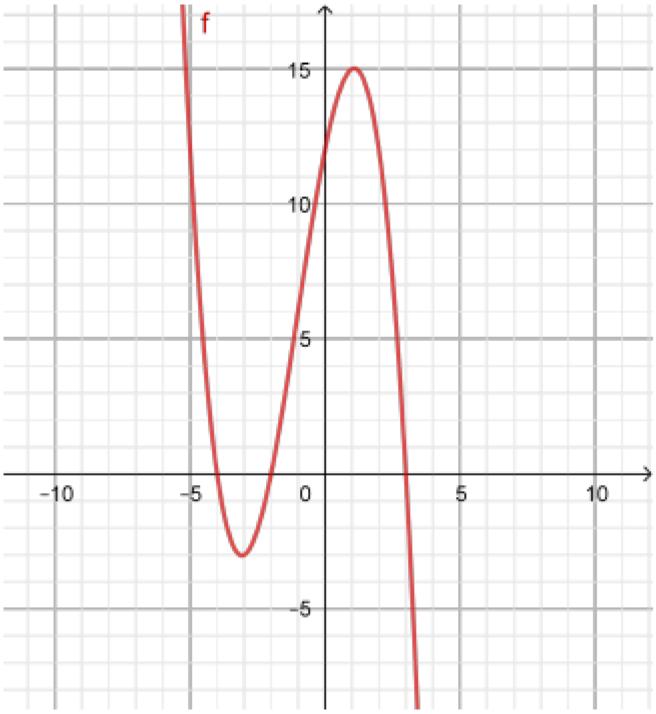
Méthode pour étudier le signe d'un polynôme de degré 3

Déterminer le signe de l'expression $f(x)=-0{,}5(x+4)(x-3)(x+2)$ sur $\mathbb{R}$.

Le signe de $f(x)$ dépend du signe de chaque facteur $-0{,}5$, $x+4$, $x-3$ et $x+2$.
On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.
$x+4=0$ équivaut à $x=-4$, $x-3=0$ équivaut à $x=3$ et $x+2=0$ équivaut à $x=-2$.
En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit $-0{,}5(x+4)(x-3)(x+2)$.

x	$-\infty$		-4		-2		3		$+\infty$
$-0{,}5$		-		-		-		-	
$x+4$		-	0	+		+		+	
$x+2$		-		-	0	+		+	
$x-3$		-		-		-	0	+	
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

On en déduit que $f(x)\geq 0$ pour $x\in\,]-\infty\,;-4]\cup[-2\,;3]$ et $f(x)\leq 0$ pour $x\in[-4\,;-2]\cup[3\,;+\infty[$.



Exercice ❶

Déterminer le signe de l'expression $f(x) = 2(x+1)(x-2)(x-5)$ sur $\mathbb{R}$.

corrigé en vidéo

5. Résolution d'une équation du type $x^3 = c$, où c est un réel positif

Propriété 4. Résolution d'une équation du type $x^3 = c$, avec c positif

L'équation $x^3 = c$, avec c un réel positif, admet une unique solution appelée racine cubique de c, et notée $\sqrt[3]{c}$ ou $c^{\frac{1}{3}}$.

Exercice ❷

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $x^3 = 27$ et $2x^3 - 6 = 16$.

corrigé en vidéo