DERIVATION ET TANGENTES

Objectifs :
- *Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.*
- *Construire la tangente à une courbe en un point.*
- *Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.*

1. Limite en zéro d'une fonction

<u>Exemple</u> : 1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty\ ;\ 0[\ \cup\ ]0\ ;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$.

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. Que se passe-t-il pour les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

Compléter le tableau suivant :

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	…	$0{,}001$	$0{,}01$	$0{,}1$	1
$f(x)$					…				

On remarque que $f(x)$ se rapproche de …… lorsque x se rapproche de 0.

On dit que **la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à ……** et on note :

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = ……$

2. Nombre dérivé

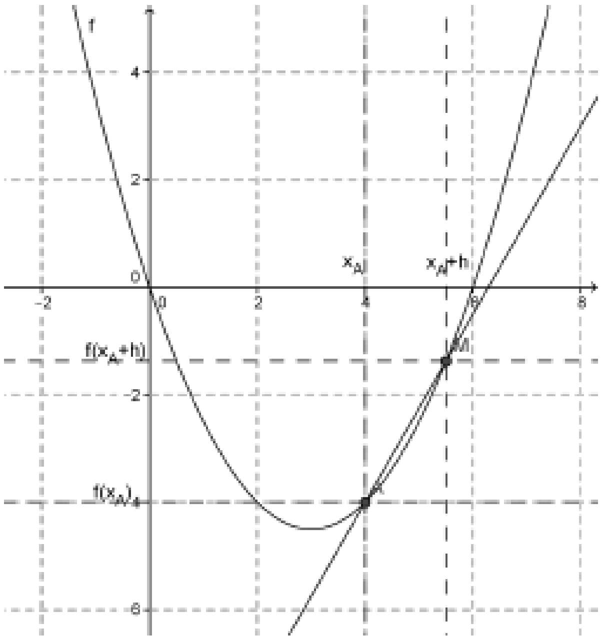
On considère une fonction f définie sur un intervalle I non vide ainsi que deux réels x_A et h avec $h\neq 0$ tels que x_A et x_A+h appartiennent à I.

On rappelle que le taux de variation de f entre x_A et x_A+h est le nombre :

$$\frac{f(x_A+h)-f(x_A)}{x_A+h-x_A}=\frac{f(x_A+h)-f(x_A)}{h}.$$

Définition 1. *Nombre dérivé*

Lorsque le taux de variation tend vers un réel quand h tend vers 0, on dit que f admet un nombre dérivé en x_A. Ce nombre dérivé est noté $f'(x_A)$.
On dit aussi que f est dérivable en x_A.



Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. On cherche à calculer le nombre dérivé de f en 2.

● On commence à calculer $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^2 - 2^2}{h} = \frac{\cancel{2^2} + 2\times 2\times h + h^2 - \cancel{2^2}}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = \frac{4h}{h} + \frac{h^2}{h} = 4+h$$

● On cherche la limité de $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}(4+h) = 4$$

Donc **4 est le nombre dérivé de la fonction f en 2**. On note : $\boldsymbol{f'(2) = 4}$.

corrigé en vidéo

Exercice ❶

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle on a : $\dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = -5 + h$.

Déterminer $f'(-2)$.

Exercice ❷

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour laquelle on a : $\dfrac{g(1+h) - g(1)}{h} = h^2 + 2h + 2$.

Déterminer $g'(1)$.

Exercice ❸

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

a) Montrer que $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = h + 1$.

b) En déduire $f'(2)$.

[corrigé en vidéo]

Exercice ❹

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\ ;\ 0[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Montrer que $\dfrac{g(-1+h)-g(-1)}{h}=\dfrac{1}{h-1}$.

b) En déduire $g'(-1)$.

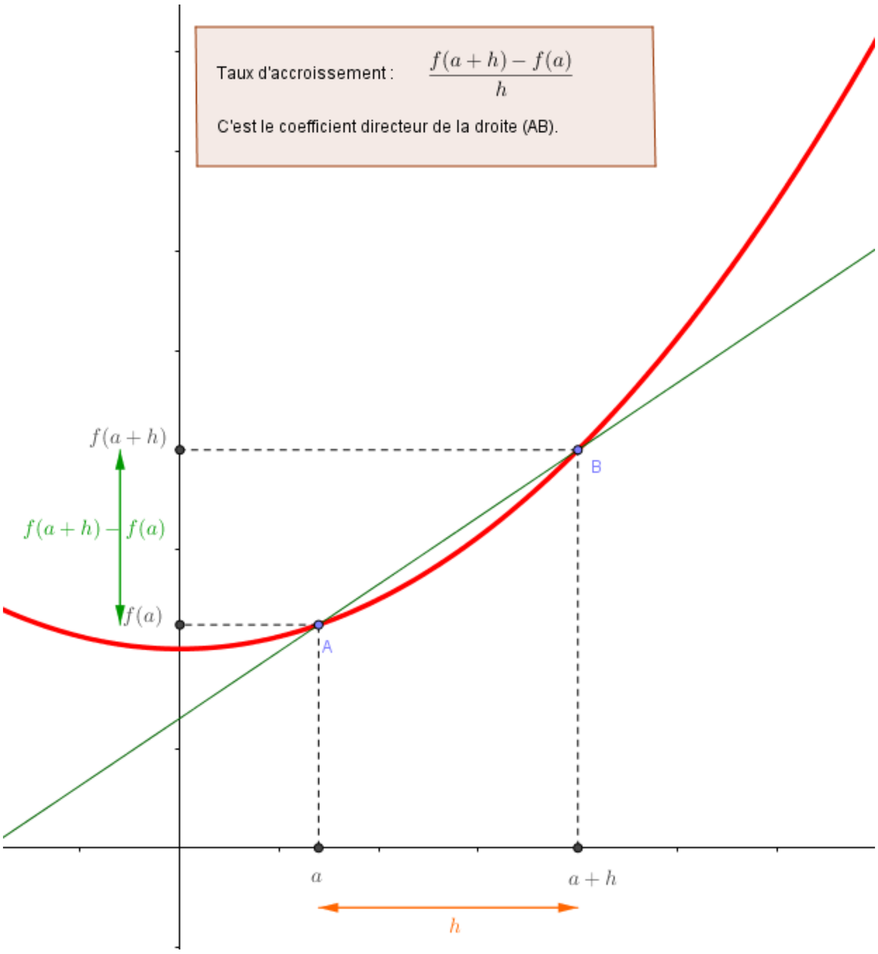
[corrigé en vidéo]

3. Tangente à une courbe

Définition 2. ***Tangente à une courbe***

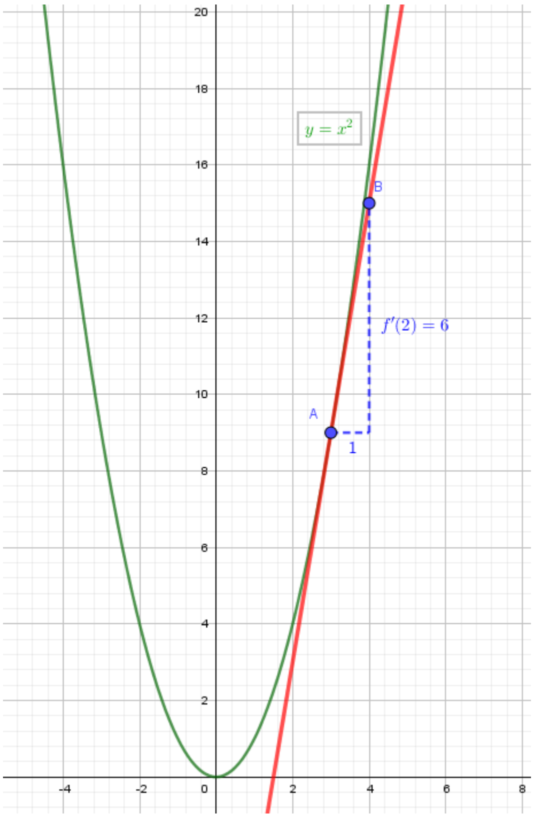
Si f est dérivable en x_A dans un repère, la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en x_A est la droite qui a pour coefficient directeur $f'(x_A)$ et qui passe par le point A de coordonnées $(x_A\ ;f(x_A))$.

Animation GeoGebra



Méthode pour tracer une tangente à une courbe en un point et la tracer

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = x^2. On cherche à tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

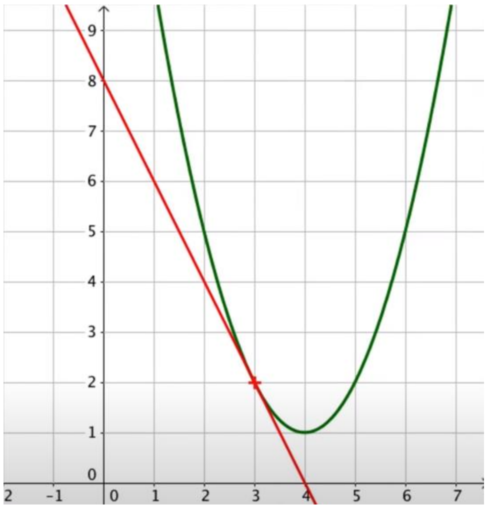


D'après l'exemple du **2.**, on sait que $f'(3) = 6$.

On place le point de coordonnées $(3\ ;\ f(3))$, c'est-à-dire $(3\ ;\ 9)$

On trace la droite passant par ce point et de coefficient directeur $f'(3) = 6$.

Exercice ❺



Déterminer graphiquement le nombre dérivé de la fonction en $x = 3$.

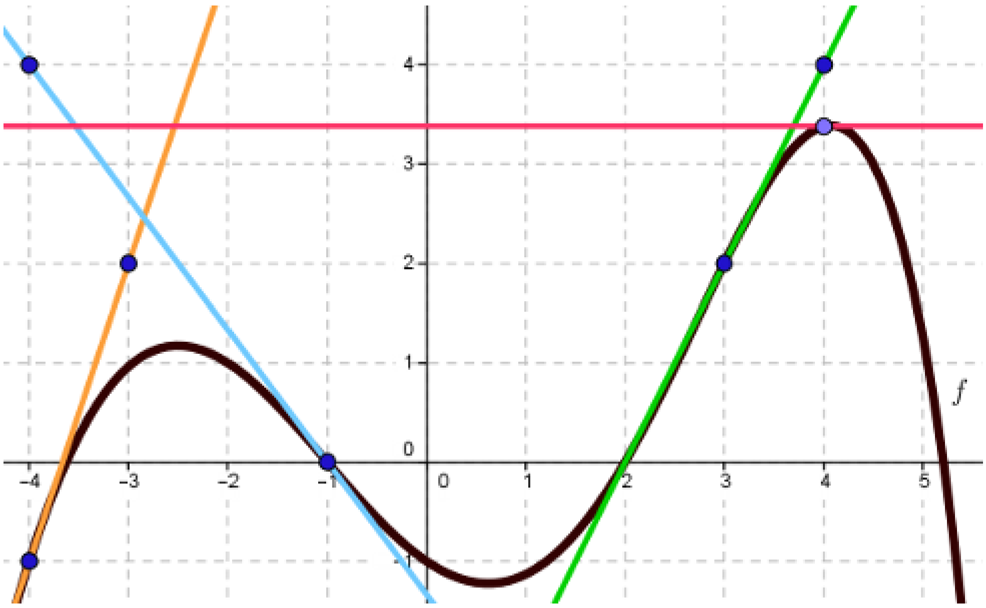
[corrigé en vidéo]

Exercice ❻

On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, représentée par sa courbe $\mathscr{C}$ en noire ci-dessous.

On a également tracé les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses -4, -1, 3 et 4.

Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f'(-4)$, $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(4)$ et $f'(4)$.



Propriété. *Tangente à une courbe*

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en x_A est la droite qui a pour équation $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$.

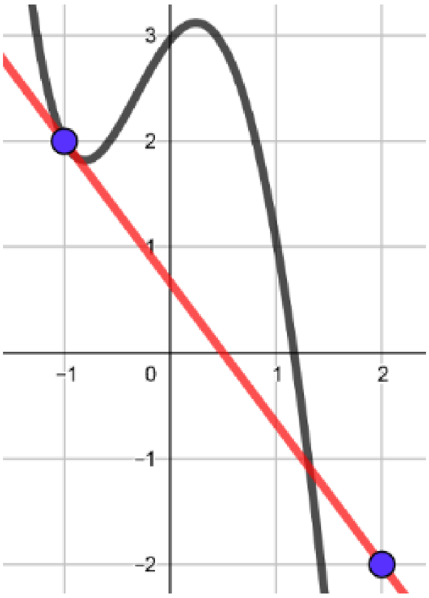
Méthode pour déterminer l'équation réduite d'une tangente à une courbe en un point

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = x^2. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

D'après la propriété, l'équation de cette tangente est de la forme $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$.
Or $f'(x_A) = f'(3) = 6$ et $f(x_A) = f(3) = 9$; alors $y = 6(x-3)+9 = 6x - 18 + 9 = 6x - 9$.
Donc **l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 est $y = 6x - 9$**.

Autre méthode : L'équation d'une droite est de la forme $y = mx + p$ où m est le coefficient directeur de la droite et p l'ordonnée à l'origine.
Ici $m = f'(3) = 6$; donc la droite a pour équation $y = 6x + p$.
Cherchons p : on sait que la tangente passe par $A(3\,;\,9)$; alors $y_A = 6x_A + p$, c'est-à-dire $9 = 6 \times 3 + p$ ou encore $9 = 18 + p$.
$9 = 18 + p$ équivaut à $9 - 18 = 18 + p - 18$, c'est-à-dire à $-9 = p$
Par conséquent, **l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 est $y = 6x - 9$**.

Exercice ❼
On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, représentée par sa courbe $\mathscr{C}$ en noire ci-dessous.
On a également tracé en rouge la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe de f au point d'abscisse -1.
À l'aide du graphique, déterminer $f'(-1)$ puis une équation de cette tangente $\mathscr{T}$.



corrigé en vidéo

Exercice ❽

La courbe d'une fonction g admet une tangente au point d'abscisse -1 d'équation $y=-2x+1$

Déterminer $g(-1)$ et $g'(-1)$.