

CALCUL VECTORIEL ET PRODUIT SCALAIRE

Objectifs :

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.
- En vue de la résolution d'un problème, calculer le produit scalaire de deux vecteurs en choisissant une méthode adaptée (en utilisant la projection orthogonale, à l'aide des coordonnées, à l'aide des normes et d'un angle, à l'aide de normes).



Hermann Grassmann
(1809 - 1877)

Au XIX^e siècle, le mathématicien allemand Grassmann étudiant le phénomène des marées, développe le calcul vectoriel et définit le produit scalaire qu'il appelle **produit linéaire** : « Il s'agit du produit algébrique d'un vecteur multiplié par la projection du second vecteur sur le premier ». C'est William Hamilton (1805 - 1865), mathématicien et astronome irlandais, qui le nomme **produit scalaire** en 1853 car le résultat du produit scalaire de deux vecteurs est un réel (scalaire vient du latin *scala* qui signifie mesure).

1. Produit scalaire de deux vecteurs

Définition 1. Norme d'un vecteur

Soient un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

Définition 2. Produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right).$$

Ce n'est pas une multiplication ...

Définitions 3. Autres expressions du produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le nombre réel défini aussi par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ où $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans un repère orthonormal quelconque.

- Soit A, B et C trois points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$$

$$= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{(\vec{u}, \vec{v})})$$

Le produit scalaire de deux vecteurs est un réel

Démonstrations de l'égalité de ces quatre expressions :

• **Égalité entre les deux premières expressions :**

$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y')$, donc

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 = x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2 ; \text{ on en déduit que :}$$

$$\frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \frac{1}{2}[(x^2 + 2xx' + x'^2 + y^2 + 2yy' + y'^2) - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)]$$

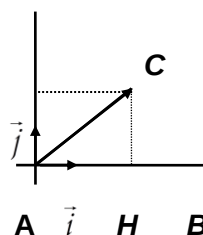
$$\text{c'est-à-dire } \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = xx' + yy'.$$

• **Égalité entre les deuxième et troisième expressions :**

Choisissons un repère orthonormal $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires et de même sens.

On note $(x ; y)$ et $(x' ; y')$ les coordonnées respectivement de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans ce repère.

On a alors : $x = AB$, $y = 0$, $x' = AC \times \cos(\widehat{BAC})$ et $y' = AC \times \sin(\widehat{BAC})$.



$$\text{Ainsi } xx' + yy' = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) + 0 \times AC \times \sin(\widehat{BAC}) = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}).$$



[différentes méthodes pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs](#)

Exercice 1

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AB = 5$.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



[corrigé en vidéo](#)

Exercice 2

Soient $A(2; 3)$, $B(-1; 7)$ et $C(1; 8)$ trois points du plan muni d'un repère orthonormal. Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



[corrigé en vidéo](#)

Remarques : • **Signe du produit scalaire** : on déduit facilement le signe du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ suivant la nature de l'angle BAC .

En effet, les normes des deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont positives. On en déduit donc que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est du signe de $\cos(BAC)$.

- si $0 \leq BAC < \frac{\pi}{2}$, $\cos(BAC) > 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} > 0$.

- si $BAC = \frac{\pi}{2}$, $\cos(BAC) = 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

- si $\frac{\pi}{2} < BAC \leq \pi$, $\cos(BAC) < 0$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} < 0$.

• **Le produit scalaire de deux vecteurs dépend de leurs normes** : le cosinus d'un angle est un réel compris entre 1 et -1 . On a donc : $-\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \leq \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

• **Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires** :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de même sens**, alors $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 1$.

On en déduit que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires et de sens contraire**, alors $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ et $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = -1$.

On en déduit que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

2. Propriétés

Propriété 1. Propriété de symétrie

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Démonstration : $\vec{v} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2}(\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2) = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) = \vec{u} \cdot \vec{v}$

Propriété 2. Propriétés de bilinéarité

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan.

Alors $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

Démonstrations : On se place dans un repère orthonormal (seulement utile pour la

démonstration) et on note $(x; y)$, $(x'; y')$ et $(x''; y'')$ les coordonnées respectives de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Montrons l'égalité $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$; les autres égalités se montrent de la même façon.

$\vec{v} + \vec{w}$ a pour coordonnées $(x' + x''; y' + y'')$.

Donc $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = x(x' + x'') + y(y' + y'') = (xx' + yy') + (xx'' + yy'') = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Exercice 3

ABCD est un carré de longueur a . M est un point du segment $[AD]$.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM}$ en fonction de a .



[corrigé en vidéo](#)

Remarque : D'après la définition,

$$\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + (-\vec{v})\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|-\vec{v}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right) = -\frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)$$

Or $\vec{u} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v}$; d'où $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)$. On en déduit alors :

Propriété 3. Autre expression du produit scalaire de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.

Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, est le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right).$$

Conséquence : Soit A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$.

Alors $\vec{u} - \vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

D'après la propriété 2, on en déduit que

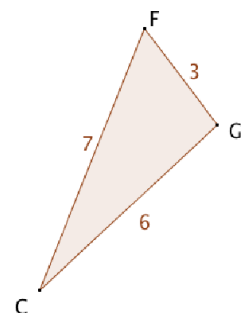
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{CB}\|^2 \right) = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Propriété 4. Produit scalaire et distances

Soient A, B et C trois points du plan. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$

Exemple : Calculer $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF}$.

$$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2} (CG^2 + CF^2 - GF^2) = \frac{1}{2} (6^2 + 7^2 - 3^2) = 38$$



Propriété 5. Carré scalaire et norme

Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est appelé **carré scalaire** de $\vec{u}$. On le note $\vec{u}^2$.

On a : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{u}\|^2$.

Ce qui donne, pour deux points A et B du plan : $\overline{AB}^2 = \|\overline{AB}\|^2 = AB^2$.

Remarques : • $\vec{u}$ est unitaire si, et seulement si, $\vec{u}^2 = 1$.

• Après quelques calculs, on retrouve **des produits scalaires remarquables** :

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2 \vec{u} \cdot \vec{v} \quad ; \quad (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2 \vec{u} \cdot \vec{v} \quad ; \quad (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2.$$



Attention ! : Il y a des ressemblances évidentes entre les règles de calcul du produit scalaire et celles sur les réels, mais il ne faut pas généraliser.

En effet, on peut avoir $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

D'autre part, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ n'implique pas $\vec{v} = \vec{w}$.

Exercice 4

Dans un repère orthonormé, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que : $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 5$ et

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{5\pi}{6}.$$

Calculer : $\vec{u} \cdot \vec{v}$; $(\vec{v} - \vec{u})(\vec{u} + 3\vec{v})$; $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ et $\|\vec{u} - 2\vec{v}\|$.



[corrigé en vidéo](#)

3. Produit scalaire et orthogonalité

Propriété 6. Vecteurs orthogonaux

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration : Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, le résultat est évident.

Supposons $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$. On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

On en déduit que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$.

Exercice 5

Soient $A(2 ; 1)$, $B(5 ; 3)$, $C(1 ; 4)$ et $D(5 ; -2)$ trois points du plan muni d'un repère orthonormal. Démontrer que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

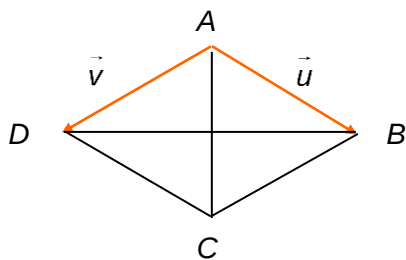


[corrigé en vidéo](#)

Exercice 6

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

Montrer que $ABCD$ est un losange si, et seulement si, ses diagonales sont perpendiculaires.



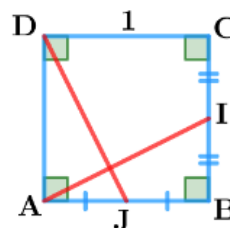
Exercice 7

$ABCD$ est un carré de côté 1.

I est le milieu de $[BC]$ et J celui de $[AB]$.

Démontrer que (AI) et (DJ) sont perpendiculaires :

- a) à l'aide d'un repère.
- b) sans utiliser de repère.

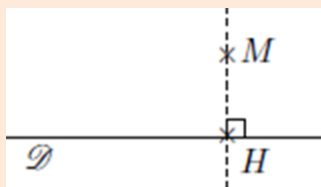


[corrigé en vidéo](#)

Définition 4. Projeté orthogonal

Soient $\mathcal{D}$ une droite et M un point du plan.

On appelle projeté orthogonal du point M sur la droite $\mathcal{D}$ l'unique point d'intersection H de la droite $\mathcal{D}$ et de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par le point M .

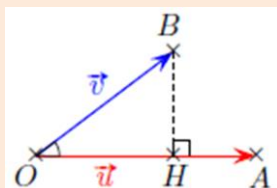


Propriété 7. Produit scalaire et projeté orthogonal

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Soit H le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) .

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$.

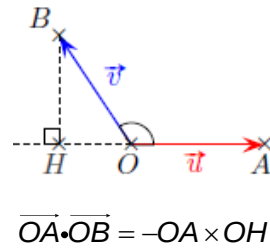
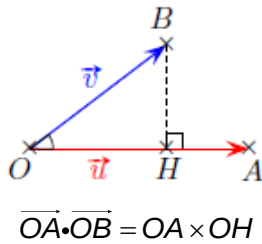


Démonstration : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB}$.

Or les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux ; d'où $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HB} = 0$.

Par conséquent, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$.

Remarque :



Exercice ⑧

$ABCD$ est un carré de longueur c . M est un point du segment $[AD]$.

Calculer, en fonction de c , les produits scalaires : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB}$

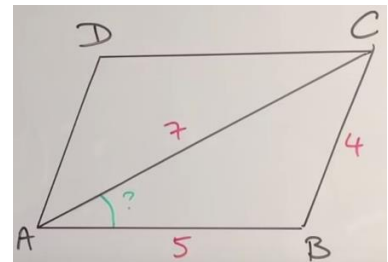


[corrigé en vidéo](#)

Exercice ⑨

$ABCD$ est le parallélogramme ci-contre.

Déterminer la mesure de l'angle BAC



[corrigé en vidéo](#)