SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

Objectifs :

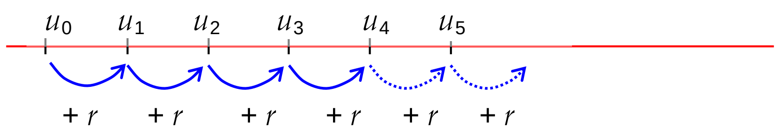
• *Pour une suite arithmétique ou géométrique, calculer le terme général, la somme de termes consécutifs, déterminer le sens de variation.*
• *Modéliser un phénomène discret à croissance linéaire par une suite arithmétique, un phénomène discret à croissance exponentielle par une suite géométrique.*

1. Suites arithmétiques

Définition 1. ***Suite arithmétique***

♦ **Une suite est arithmétique lorsqu'on passe d'un terme quelconque au suivant en ajoutant toujours un même nombre r appelé raison.**
♦ **Autrement dit, (u_n) est une suite arithmétique si, et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$.**

Chaque terme est obtenu **en ajoutant au précédent** un nombre fixe r, qui est la **raison** de la suite.



Exemples : • La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1.

• La suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2.

Méthode pour démontrer qu' une suite est arithmétique

La suite (u_n) définie par $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?

corrigé en vidéo

Exercice ❶

Soit (v_n) la suite définie par $v_n = n^2 + 3$. Cette suite est-elle arithmétique ?

Propriété 1. ***Terme général d'une suite arithmétique***

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 + nr$.

Démonstration : Additionnons membre à membre les n égalités ci-dessous :

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r \\ u_2 = u_1 + r \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n-1} = u_{n-2} + r \\ u_n = u_{n-1} + r \end{cases}.$$

On obtient : $(u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}) + u_n = u_0 + (u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1}) + nr$.
Et après simplification : $u_n = u_0 + nr$.

démonstration en vidéo

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = -2$.
Alors, pour tout entier naturel n, $u_n = -3 - 2n$.

Exercice ❷
Le chiffre d'affaires d'une entreprise s'accroît tous les ans de 50 000 euros. En 2008, le chiffre d'affaire était de 500 000 euros. On note $C_0 = 500\ 000$.

1) Montrer que la suite (C_n) est arithmétique.
2) Exprimer C_n en fonction de n.

Exercice ❸
Soit (u_n) la suite arithmétique telle que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.

1) Déterminer la raison et le premier terme u_0 de la suite (u_n).
2) Exprimer u_n en fonction de n.

corrigé en vidéo

Propriété 2. ***Variations d'une suite arithmétique***

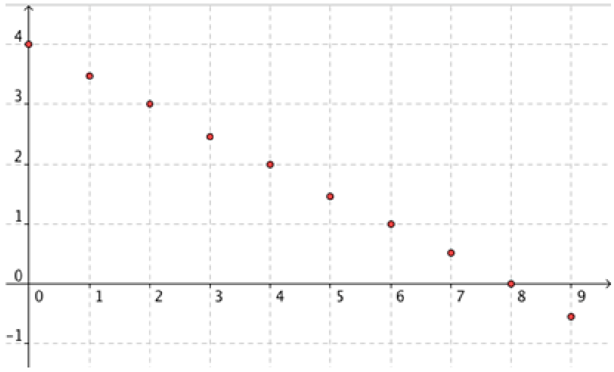
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
- **Si $r > 0$, alors (u_n) est croissante.**
- **Si $r = 0$, alors (u_n) est constante.**
- **Si $r < 0$, alors (u_n) est décroissante.**

Exemple : La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -0{,}5n + 4$ est décroissante car $-0{,}5 < 0$.

Propriété 3. ***Représentation graphique d'une suite arithmétique***

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère du plan est constituée de points alignés.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = -0,5n + 4$.



Propriété 4. ***Somme des termes d'une suite arithmétique***

Soit n un entier naturel non nul. $1 + 2 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Démonstration : Calculons la somme $S = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1 + 2 + ... + n$.
On peut écrire :

$$\begin{cases} S = 1 + 2 + 3 + ... + (n-2) + (n-1) + n \\ S = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1 \end{cases}$$

En additionnant membre à membre, on obtient :

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + ... + (n+1) + (n+1) + (n+1)}_{n \text{ fois}},$$

C'est-à-dire $2S = n(n+1)$. Par conséquent, $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

démonstration en vidéo

Remarque : Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Exercice ❹

1) Calculer la somme $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + 88$.

corrigé en vidéo

2) Calculer la somme $S_1 = 33 + 36 + 39 + ... + 267$.

corrigé en vidéo

Johann Carl Friedrich Gauss
(Source : [Wikipédia]())

Carl Fiedrich Gauss (1777-1855), surnommé « le prince des mathématiques », publia dès 1801 un important ouvrage de théorie des nombres « Disquisitiones arithmeticae ».

Une anecdote relate également comment Gauss sait faire preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune Gauss, alors âgé de 10 ans, impressionne son professeur en donnant la réponse correcte.

Méthode pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique à l'aide de la calculatrice

On reprend la suite utilisée dans l'exercice 1.

1) Déterminer le chiffre d'affaires total de l'entreprise au bout de 7 ans.
2) Déterminer le chiffre d'affaires total de l'entreprise entre la 5ème année et la 10ème année.

1) Le chiffre d'affaires total de l'entreprise au bout de 7 ans est égal à $C_0 + C_1 + C_2 + ... + C_7$.
Utilisons une calculatrice :

- Pour accéder au catalogue : « `2nde` » puis « `0` ».
- Appuyer sur « `ln` » pour accéder aux fonctionnalités commençant par « `S` ».
- Choisir « `som(` » ou « `somme(` » ou « `sum(` » (suivant les modèles).
- Procéder de même pour afficher « `suite(` » ou « `seq(` » (suivant les modèles).
- Et compléter pour afficher : `som(suite(500000+50000X,X,0,7))`

La calculatrice affiche 5 400 000 ; donc **le chiffre d'affaires total de l'entreprise au bout de 7 ans est de 5 400 000 euros**.

2) Le chiffre d'affaires total de l'entreprise entre la 5ème année et la 10ème année est égal à $C_5 + C_6 + C_7 + ... + C_{10}$.
On saisit sur la calculatrice : `som(suite(500000+50000X,X,5,10))`
La calculatrice affiche 5 250 000 ; donc **le chiffre d'affaires total de l'entreprise entre la 5ème année et la 10ème année est de 5 250 000 euros**.

Exercice ❺

Fin 2014, le nombre d'auditeurs d'une radio locale Skymath était de 20 000. Depuis, ce nombre n'a cessé d'augmenter régulièrement de 2 500 par an.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'auditeurs à la fin de l'année $(2014+n)$.
On a alors $u_0 = 20\,000$.

1) Calculer u_1. Que représente cette valeur ?
2) Ecrire la relation entre u_n et u_{n+1}. En déduire la nature de la suite (u_n).
3) On considère l'algorithme ci-dessous :

```python
N=0
U=20000
while U<40000:
    U=U+2500
    N=N+1
```

À la fin de l'exécution de cet algorithme, la variable N est égale à 8.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

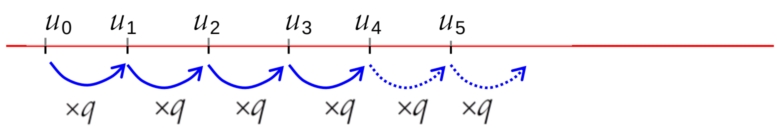
Remarque : Si a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $b = \dfrac{a+c}{2}$

2. Suites géométriques

Définition 2. *Suite géométrique*

♦ Une suite est géométrique lorsqu'on passe d'un terme quelconque au suivant en multipliant toujours par un même nombre q appelé raison.
♦ Autrement dit, (u_n) est une suite géométrique si, et seulement si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$.

Chaque terme est obtenu **en multipliant le précédent** par un nombre fixe q, appelé la **raison** de la suite.



Exemple : La suite des entiers naturels pairs est une suite géométrique de raison 2.

Méthode pour démontrer qu'une suite est géométrique

La suite (u_n) définie par $u_n = 3 \times 5^{n+1}$ est-elle géométrique ?

corrigé en vidéo

Exercice ❻

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 0{,}5 \times 3^n$.
Montrer que la suite (u_n) est géométrique.

Propriété 5. *Terme général d'une suite géométrique*

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors, pour tout entier n, $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration : Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Alors, $u_1 = qu_0$. Puis $u_2 = qu_1 = q(qu_0) = q^2u_0$.
Et ainsi de proche en proche, car lorsqu'on aura établi que pour l'entier naturel p, $u_p = q^p u_0$, on en déduira que $u_{p+1} = q^{p+1}u_0$. En effet, $u_{p+1} = qu_p = q(q^p u_0) = q^{p+1}u_0$.

démonstration en vidéo

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $q = 5$.
Alors, pour tout entier naturel n, $u_n = 7 \times 5^n$.

Exercice ❼

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 % par an.
On note C_n la valeur du capital après n années. On note $C_0 = 500$.

1) Montrer que la suite (C_n) est géométrique.

2) Exprimer C_n en fonction de n.

Exercice ❽

Soit (u_n) la suite géométrique telle que $u_4 = 2$ et $u_7 = 16$.

1) Déterminer la raison et le premier terme u_0 de la suite (u_n).

2) Exprimer u_n en fonction de n.

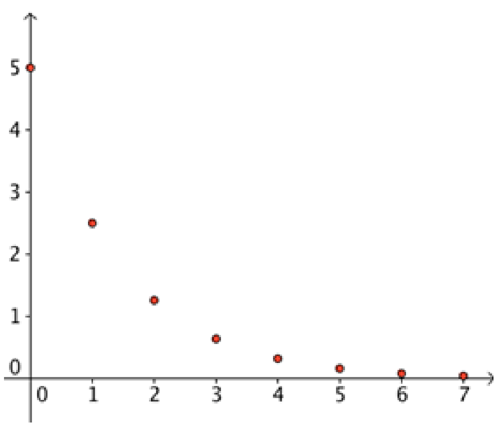
corrigé en vidéo

Propriété 6. ***Variations d'une suite géométrique***

Soit (u_n) une suite arithmétique géométrique de raison q (q étant strictement positive) et de premier terme u_0.

- **Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.**
  Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- **Si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.**
  Si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- **Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante.**

Exemple : Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n par $u_n = 5 \times (0{,}5)^n$ car la raison est égale à 0,5 et est inférieure à 1.



On parle de « croissance exponentielle »

Propriété 7. ***Somme des termes d'une suite géométrique***

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q différente de

1. On a : $1+q+q^2+...+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Démonstration : Calculons la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$.
On peut écrire :

$$\begin{cases} S = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n \\ qS = q + q^2 + q^3 + ... + q^n + q^{n+1} \end{cases}$$

Par soustraction, on obtient : $S - qS = 1 - q^{n+1}$, c'est-à-dire $(1-q)S = 1 - q^{n+1}$.

Par conséquent, $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

démonstration en vidéo

Remarque : Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Exercice ❾

Calculer la somme $S_1 = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{13}$.

corrigé en vidéo

Méthode pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 0{,}5 \times 3^n$.
Déterminer $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_7$.

On saisit sur la calculatrice : `som(suite(5*3^X,X,0,7))`

La calculatrice affiche 16 400 ; donc $u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_7 = 16\ 400$.

Exercice ❿

Les apiculteurs d'Occitanie ont produit 5 245 tonnes de miel en 2014 et 3 495 tonnes en 2016. (source : https://blog.icko-apiculture.com/observatoire-de-la-production-de-miel-et-de-gelee-royale/)

1) Déterminer le pourcentage de réduction de la production de miel entre 2014 et 2016.
2) À partir de 2016, une étude prévoit, chaque année, une baisse de 5 % de la production de miel en Occitanie.
Pour tout entier naturel n, on modélise la production, exprimée en tonnes, de mile en Occitanie pour l'année $(2016+n)$ à l'aide d'une suite notée (u_n).
On a donc $u_0 = 3\ 495$.

a) Calculer u_1 et u_2. Arrondir les résultats à l'unité.
b) Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Donner sa raison.
c) En déduire l'expression de u_n pour tout entier naturel n.

d) Déterminer la production de miel en Occitanie en 2020.
On donnera le résultat arrondi en tonnes.
e) Compléter l'algorithme suivant pour qu'à la fin de son exécution la variable U contienne le terme de rang 10 de la suite (u_n).

```
U=3495
for n in range(10):
    U=......
print(U)
```

Remarque : Si a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique, alors $b^2 = ac$.
Si trois nombres positifs a, b et c vérifient $b^2 = ac$, on dit que b est la moyenne géométrique de a et c.

Exercice ❶❶

La directrice des ventes d'un site de jeux vidéo en ligne a recensé 2 000 abonnés au 1er janvier 2019. Elle est inquiète car le nombre d'abonnés ne peut être inférieur à 1 000.
Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année, le nombre d'abonnés précédent subit une baisse de 8 % de son effectif et que 25 nouvelles personnes s'abonnent.
On modélise l'évolution du nombre d'abonnés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'abonnés au 1er juin de l'année $(2019+n)$.
On a donc $u_0 = 2\ 000$.

1) Montrer que, selon ce modèle, le nombre d'abonnés sera de 1 865 en 2020.
2) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3) À l'aide d'un tableur, la directrice a calculé les huit premiers termes de la suite. Les valeurs ont été arrondies à l'unité près.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	$u(n)$	2000	1865	1741	1627	1521	1425	1336	1254	1179	1109	1046

a) Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les premiers termes de la suite (u_n) ?
b) Que semble être le sens de variation de la suite (u_n) ?
c) Montrer que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

4) Les craintes de la directrice sont-elles justifiées ?
5) Le fils de la directrice a préféré utiliser un programme en Python afin de vérifier les craintes de sa mère. Compléter son programme :

```
N=0
U=2000
While U>......:
    U=......
    N=N+1
```