FONCTIONS DÉRIVÉES

Objectifs :
- *À partir de la définition, calculer la fonction dérivée de la fonction carré, de la fonction inverse.*
- *Dans des cas simples, calculer une fonction dérivée en utilisant les propriétés des opérations sur les fonctions dérivables.*

1. Fonctions dérivées

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=x^2$. La fonction f est-elle dérivable pour tout réel a ?

Soit a un réel. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots-\ldots\ldots}{h}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}=\ldots\ldots+\ldots\ldots.$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots.$

Donc, pour tout réel a, la fonction f est dérivable en a, et $f'(a)=\ldots\ldots.$

On a donc défini sur **R** une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x)=\ldots\ldots$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de f.

démonstration en vidéo

Définition 1. ***Fonction dérivée***

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction, qui à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$, s'appelle fonction dérivée de f. On la note f'.

<u>*Remarque*</u> : On appelle *ensemble de dérivabilité* de la fonction f, l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f' est définie.

On note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f et $\mathscr{D}_{f'}$ l'ensemble de définition de la fonction dérivée de f'.

Fonction f	$\mathscr{D}_f$	Fonction f'	$\mathscr{D}_{f'}$
$f(x)=k$ k étant un réel	R		R
$f(x)=mx+p$ m et p étant des réels	R		R
$f(x)=x^2$	R		R
$f(x)=x^n$, $n\in \mathbb{N}^*$	R		R
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	R*		R*
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$		$]0\,;+\infty[$
$f(x)=\lvert x\rvert$	R		$]-\infty\,;0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$

Démonstrations :

a) Soit a un réel. Pour h différent de 0, on a : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{k-k}{h}=0$.

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}(0)=0$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a, et $f'(a)=0$.

b) Soit a un réel. Pour h différent de 0, on a : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{m(a+h)-ma}{h}=\dfrac{mh}{h}=m$.

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}(m)=m$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a, et $f'(a)=m$.

c) Déjà démontrée au début du paragraphe

d) On l'admettra.

e) Soit a un réel différent de 0. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}}{h}=\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}=-\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}.$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}(\ldots\ldots\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a non nul, et $f'(a)=\ldots\ldots\ldots$.

démonstration en vidéo

f) Soit a un réel strictement positif. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\ \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a strictement positif, et $f'(a)=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

[démonstration « la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 » en vidéo]

2. Fonctions dérivées et opérations

Propriété 1. *Produit d'une fonction dérivable par une constante*

Soit u une fonction définies et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit k un réel.

Alors la fonction ku est dérivable sur I et $(ku)'=k\times u'$.

Démonstration : Soit a un élément de I. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h}=\frac{ku(a+h)-ku(a)}{h}=k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}.$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\right)=k\times\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\right)=k\times u'(a)$$

Donc la fonction ku est dérivable en tout réel a de I, et $(ku)'(a)=k\times u'(a)$.

Exemple : *Soit f la fonction définie sur **R** par $f(x)=3x^2$.*

$f=3u$ où $u(x)=x^2$. u est dérivables sur **R**, donc f est dérivable sur **R**.
Alors $f'=3u'$ où $u'(x)=2x$, et pour tout réel x, $f'(x)=3\times 2x=6x$.

Propriété 2. *Somme de deux fonctions dérivables*

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)'=$…………….

Démonstration : Soit a un élément de I. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=\frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}=\frac{\big(u(a+h)-u(a)\big)-\big(v(a+h)-v(a)\big)}{h}$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}-\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}\right)=u'(a)+v'(a)$.

Donc la fonction $u+v$ est dérivable en tout réel a de I, et $(u+v)'(a)=u'(a)+v'(a)$.

Exemple : *Soit g la fonction définie sur **R** par $g(x)=x^3+x^2$.*

$g=u+v$ où $u(x)=x^3$ et $v(x)=x^2$.
u et v sont dérivables sur **R**, donc g est dérivable sur **R**.

Alors $g' = u' + v'$ où $u'(x) = 3x^2$ et $v(x) = 2x$, et pour tout réel x,
$g'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x+2)$.

Exercice ❶

Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = 3x^4 - 2\sqrt{x}$.

Déterminer $f'(x)$.

corrigé en vidéo

Propriété 3. *Produit de deux fonctions dérivables*

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction $u \times v$ est dérivable sur I et $(u \times v)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Démonstration : Soit a un élément de I. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}.$$

Or : $\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} \times v(a+h) + \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} \times u(a) = \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{h}$

D'où $\lim\limits_{h \to 0}\left(\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

Donc la fonction uv est dérivable en tout réel a de I, et

$(uv)'(a) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$.

démonstration en vidéo

Exemple : *Soit f la fonction définie sur [0 ; +∞[par f(x) = x$\sqrt{x}$. Déterminer la dérivée de la fonction f.*

$f = uv$ où $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{x}$.

$\begin{cases} u \text{ est dérivable sur } [0\,;+\infty[\\ v \text{ est dérivable sur }]0\,;+\infty[\end{cases}$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Alors $f' = u'v + uv'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$,

$$f'(x) = 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$

Exercice ❷

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)(3-2x^2)$.

Déterminer $f'(x)$.

corrigé en vidéo

Propriété 4. ***Inverse d'une fonction dérivable***

Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Démonstration : Soit a un élément de I. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(a)}{h}=\frac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h}=\frac{v(a)-v(a+h)}{hv(a+h)v(a)}=-\frac{1}{v(a+h)v(a)}\times\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

D'où $\displaystyle\lim_{h\to 0}\left(\frac{\left(\frac{1}{v}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(a)}{h}\right)=-\frac{1}{v(a)\times v(a)}\times v'(a)$.

Donc la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en tout réel a de I, et $\left(\dfrac{1}{v}\right)(a)=-\dfrac{v'(a)}{v^2(a)}$.

Exemple : *Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $h(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.*

$h=\dfrac{1}{v}$ où $v(x)=\sqrt{x}$. Comme v est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, alors h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

D'où $h'=-\dfrac{v'}{v^2}$ avec $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$, $h'(x)=-\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$.

Exercice ❸

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{3x^4+1}$. Déterminer $f'(x)$.

corrigé en vidéo

Propriété 5. ***Quotient de deux fonctions dérivables***

Soit v une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Alors la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$.

Démonstration : Soit a un élément de I. Pour h différent de 0, on a : $\dfrac{u}{v}=u\times\dfrac{1}{v}$.

D'où : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=u'\times\dfrac{1}{v}+u\times\left(\dfrac{1}{v}\right)'=u'\times\dfrac{1}{v}+u\times\left(-\dfrac{v'}{v^2}\right)=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$.

Exemple : *Soit m la fonction définie sur $I = \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{4}\right[\cup \left]-\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$ par $m(x) = \frac{3x-2}{4x+1}$.*

$m = \frac{u}{v}$ où $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = 4x + 1$.

m est dérivable sur I, et pour tout réel x de I,

Alors $m' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 4$, et pour tout réel x de I,

$$m'(x) = \frac{3(4x+1) - 4(3x-2)}{(4x+1)^2} = \frac{12x + 3 - 12x + 8}{(4x+1)^2} = \frac{11}{(4x+1)^2}.$$

Exercice ❹

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{1-x^2}{3x-4}$. Déterminer $f'(x)$.

corrigé en vidéo

Remarques : • Toute fonction polynôme est dérivable sur **R**.

• Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

3. Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$

Propriété 6. *Tangente à une courbe*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Pour tout réel x, tel que $ax+b$ appartienne à I, la fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur I et pour tout réel x de I : $g'(x) = a \times f'(ax+b)$.

Exemple : *Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3x+6}$.*

$f(x)$ existe si $3x + 6 \geq 0$, c'est-à-dire si $x \geq -2$; ainsi $D_f = [-2\ ;\ +\infty[$.

Pour tout réel x de D_f, on peut écrire $f(x) = g(3x+6)$ où g est la fonction racine carrée $X \mapsto \sqrt{X}$. La fonction g est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et pour tout $X > 0$, $g'(X) = \frac{1}{2\sqrt{X}}$.

On a $X > 0$ lorsque $x > -2$.

Par conséquent, f est dérivable sur $D_f =]-2\ ;\ +\infty[$ et pour tout $x > -2$, $\boldsymbol{f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+6}}}$.

Exercice ❺

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{4}{5}\right\}$ par $f(x) = \frac{1}{5x-4}$. Déterminer $f'(x)$.

corrigé en vidéo