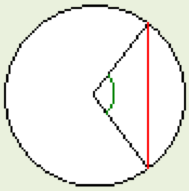
TRIGONOMÉTRIE

Objectifs :

- *Placer un point sur le cercle trigonométrique*
- *Par lecture du cercle trigonométrique, déterminer, pour des valeurs remarquables de x, les cosinus et sinus d'angles associés à x.*

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques.
Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie.
Mais on attribue à Hipparque de Nicée (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.



Le grec Claude Ptolémée (100 ; 168) poursuit dans l'*Almageste* les travaux d'Hipparque avec une meilleure précision et introduit les premières formules de trigonométrie.

Plus tard, l'astronome et mathématicien Regiomontanus (1436 ; 1476), de son vrai nom Johannes Müller von Königsberg, développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques. Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme *sinus*.

Au XVIe siècle, le français François Viète (1540 ; 1607), conseiller d'Henri IV, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.

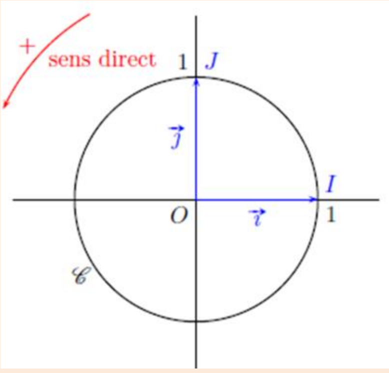
De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propagation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques.

On munit le plan d'un repère orthonormé (O ; I, J).

1. Cercle trigonométrique et radian

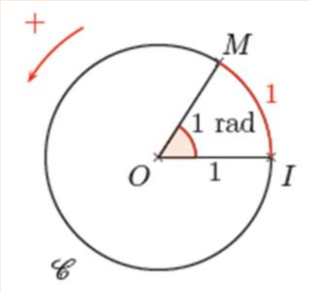
Définition 1. ***Cercle trigonométrique***

Le cercle trigonométrique est le cercle $\mathscr{C}$ de centre *O*, de rayon 1, et orienté de la manière suivante :
• le sens direct (appelé aussi sens positif ou trigonométrique) est le sens inverse des aiguilles d'une montre ;
• le sens indirect (ou négatif) est le sens des aiguilles d'une montre.



Définition 2. ***Radian***

Soit un cercle C de centre O et de rayon 1.
On appelle radian, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.



Remarque : Soit la longueur ℓ d'un arc de cercle de rayon R qui intercepte un angle au centre de mesure, en radians, θ ; alors $\ell = R \times \theta$.

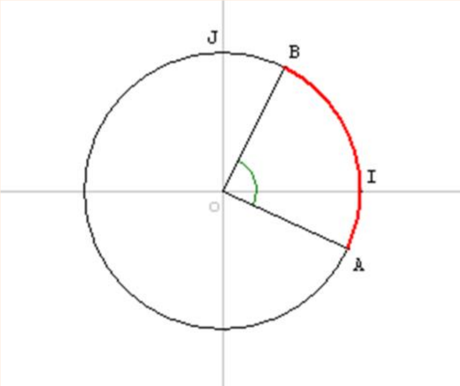
Exercice ❶

A et *B* sont deux points situés sur un cercle de centre *O* et de rayon $R = 5\ cm$ tels que l'angle au centre AOB mesure 135°. Calculer la longueur de l'arc AB.

[méthode en vidéo]

Propriété 1. ***Angle au centre et arc***

Sur un cercle trigonométrique, la mesure en radians d'un angle au centre est égale à la mesure, en unités de longueur, de l'arc qu'il intercepte.



L'angle $\widehat{AOB}$ a même mesure que l'arc $\overset{\frown}{AB}$.

Exemple : Soit un demi-cercle de rayon 1 unité. La longueur de ce demi-cercle vaut $\pi \times 1$ unités de longueur. La mesure de l'angle au centre plat est donc π radians.

Ainsi, à π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 180°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Mesure en degrés	0	30	45	60	90	180	270	360
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Méthode pour passer des degrés au radians et inversement

Convertir 33 degrés en radians et $\frac{3\pi}{8}$ radians en degrés.

corrigé en vidéo

Exercice ❷
Compléter le tableau ci-dessous :

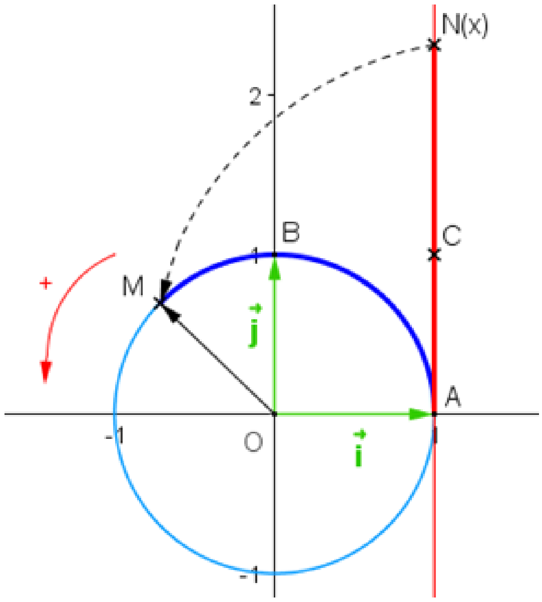
Mesure en radians	0	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{6}$		π	
Mesure en degrés			45		90		360

2. Enroulement de la droite numérique autour du cercle trigonométrique

Activité :

Liam veut améliorer son classement en triathlon lors des prochains jeux olympiques.
À défaut de piste olympique, il s'entraîne à la course à pied sur une piste circulaire de rayon 100 m.
Le parcours olympique mesure 10 km. Liam part toujours du point A.

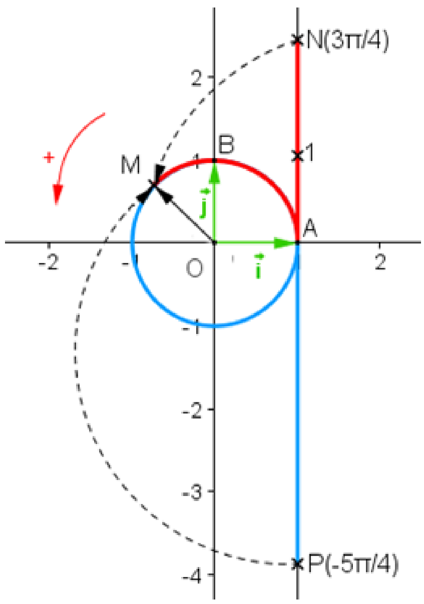
Où faut-il mettre la marque qui indique que les 10 km sont atteints et après combien de tours ?



Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $\left(A;\vec{j}\right)$ soit un repère de la droite.
Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.

La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle.
La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.



Exemples : Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $-\frac{5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M. En effet : $\frac{3\pi}{4}-2\pi=-\frac{5\pi}{4}$

On pourrait poursuivre le processus dans l'autre sens en effectuant deux tours successifs.

Ainsi, les points d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{19\pi}{4}$ correspondent au point M. En effet :
$\frac{3\pi}{4}+4\pi=\frac{19\pi}{4}$.

Exercice ❸

On enroule la droite orientée des réels sur le cercle trigonométrique.

Placer le point M associé à $\frac{9\pi}{4}$ et le point N associé à $\frac{8\pi}{3}$.

[corrigé en vidéo]

On a vu qu'un angle possède plusieurs mesures.
Si θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{i},\ \overrightarrow{OM}\right)$, alors tout angle de la forme $\theta+2k\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle $\left(\vec{i},\ \overrightarrow{OM}\right)$.

Exercice ❹
Dans chacun des cas suivants, dire si les deux réels ont le même point image sur le cercle trigonométrique : a) $\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{7\pi}{4}$; b) $\frac{2\pi}{3}$ et $-\frac{5\pi}{6}$; c) $-\frac{\pi}{6}$ et $\frac{17\pi}{6}$.

Définition 3. ***Mesure principale d'un angle orienté***

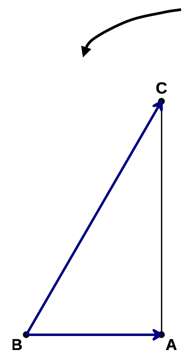
Une seule des mesures de l'angle orienté de vecteurs $\left(\vec{i},\ \overrightarrow{OM}\right)$ appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$; on l'appelle <u>mesure principale</u> de l'angle orienté de vecteurs $\left(\vec{i},\ \overrightarrow{OM}\right)$.

Remarque : La valeur absolue de la mesure principale de l'angle orienté de vecteurs $\left(\vec{i},\ \overrightarrow{OM}\right)$ est la mesure de l'angle géométrique formé par ces deux vecteurs.

Exemple :
La mesure principale de $\left(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC}\right)$ est $\frac{\pi}{3}$. $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{3}$

La mesure principale de $\left(\overrightarrow{CA},\ \overrightarrow{CB}\right)$ est $-\frac{\pi}{6}$ et $ACB=\frac{\pi}{6}$.

La mesure principale de $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$ est $-\frac{\pi}{2}$ et $BAC=\frac{\pi}{2}$.



Exercice ❺

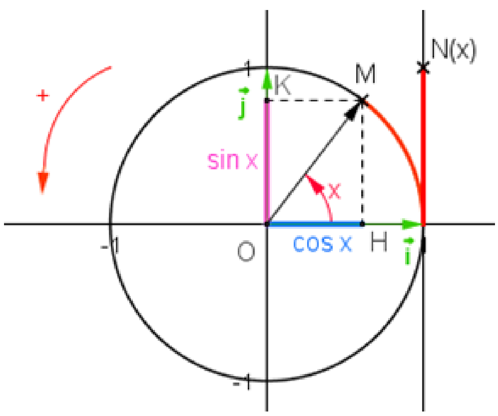
Déterminer la mesure principale de chacun des angles : $\frac{27\pi}{4}$ et $-\frac{17\pi}{3}$.

3. Cosinus et sinus d'un nombre réel

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On considère le cercle trigonométrique de centre O.

Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.
À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.



Définition 4. ***Cosinus et sinus d'un nombre réel***

- L'abscisse du point M s'appelle le cosinus du nombre réel x et se note $\cos(x)$

- L'ordonnée du point M s'appelle le sinus du nombre réel x et se note $\sin(x)$.

Exemple : Le réel $\frac{\pi}{2}$ pour image le point *J* de coordonnées $(0\ ;\ 1)$ dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.

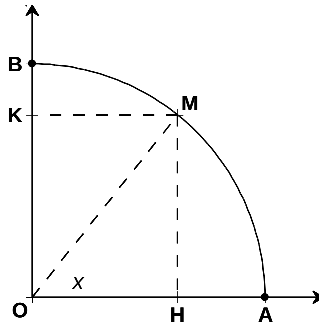
Donc : $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

Propriété 1. ***Propriétés du cosinus et du sinus***

Pour tout x réel, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$; $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ et $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

Quel que soit le réel x, $\cos(x + k\times 2\pi) = \cos(x)$, et $\sin(x + k\times 2\pi) = \sin(x)$, avec k entier.

Démonstrations : ● Le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ a pour rayon 1, alors tout point de $\mathscr{C}$ a une abscisse et une ordonnée comprise entre – 1 et 1.



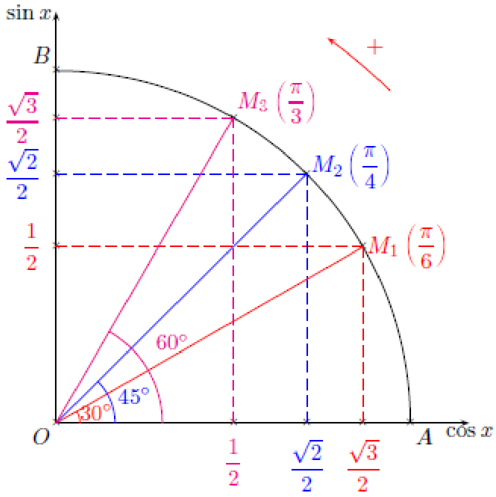
● De plus, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle OHM, on obtient :
$OM^2=OH^2+HM^2=(\cos x)^2+(\sin x)^2$.

Comme *M* appartient à $\mathbb{C}$, alors *OM* = 1. D'où $(\cos x)^2+(\sin x)^2=1$, que l'on écrit également $\cos^2 x+\sin^2 x=1$.

● Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x+2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

Il est utile de connaître ou de savoir retrouver rapidement les **valeurs remarquables** des sinus et cosinus des angles suivants :

Mesures en radians	**0**	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sinus	**0**	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	**0**
cosinus	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	**0**	**- 1**



Démonstrations : ● Montrons que $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[démonstration en vidéo]

● Montrons que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

[démonstration en vidéo]

Méthode pour apprendre à lire sur le cercle trigonométrique

[corrigé en vidéo]

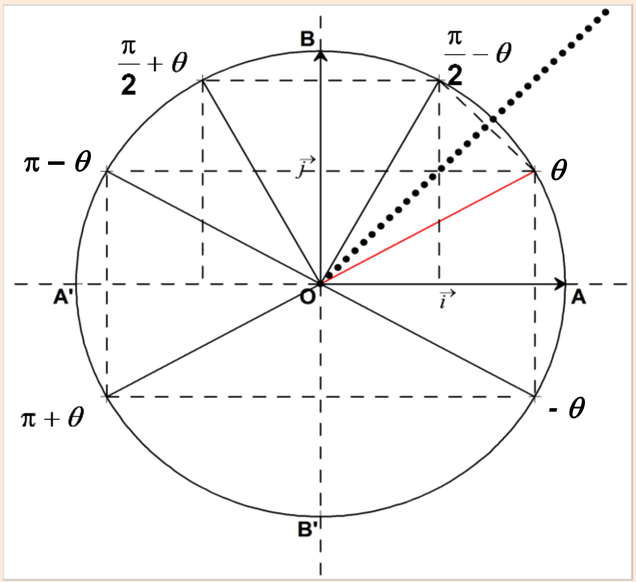
Exercice ❻

Soit x un nombre réel. Calculer $\cos(x)$ sachant que $\sin(x)=\frac{3}{5}$.

[corrigé en vidéo]

4. Cosinus et sinus d'angles associés

Propriétés 2. *Cosinus et sinus d'angles associés*



Pour tout réel θ,

$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$
$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$
$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$
$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$

Démonstrations : Pour des raisons de symétrie, on obtient les résultats suivants :

1) Les points $M(\theta)$ et $M(-\theta)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Ils ont la même abscisse mais des ordonnées opposées.

2) Les points $M(\theta)$ et $M(\pi-\theta)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Ils ont la même ordonnée mais des abscisses opposées.

3) Les points $M(\theta)$ et $M(\pi+\theta)$ sont symétriques par rapport au point *O*. Ils ont des abscisses et des ordonnées opposées.

4) Les points $M(\theta)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice

d'équation $y = x$. Leurs coordonnées sont « échangées ».

5) Les points $M\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$ de l'affirmation précédente sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Ils ont donc la même ordonnée mais des abscisses opposées. Ceci permet d'établir le résultat pour les points $M(\theta)$ et $M\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)$.

Méthode pour calculer le cosinus et le sinus d'un angle associé

Calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ *et de* $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$.

[corrigé en vidéo]

Exercice ❼

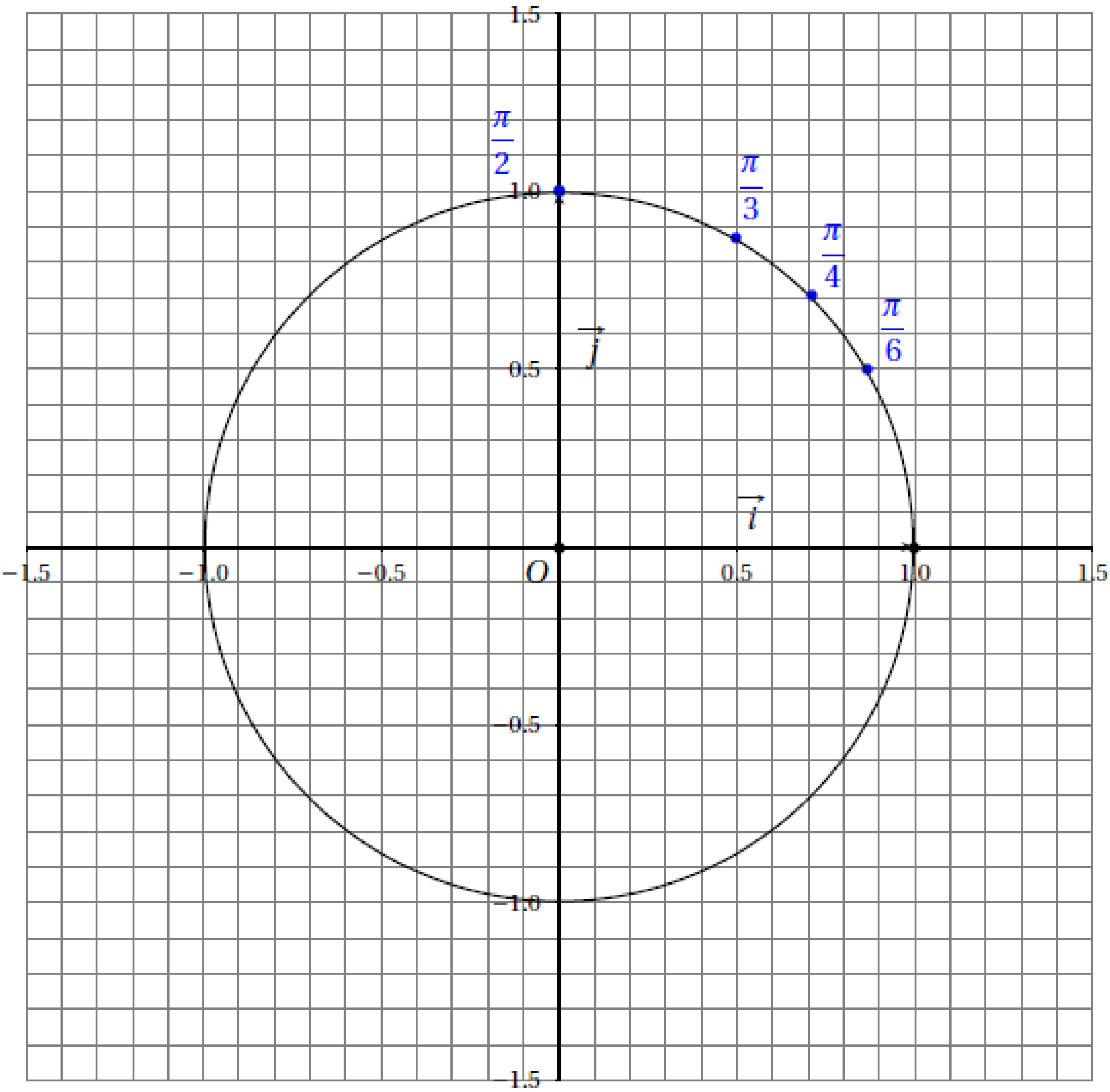
À partir du tableau des valeurs remarquables et des formules précédentes, retrouver les valeurs suivantes (aussi remarquables), vous placerez les valeurs d'angle x sur le cercle trigonométrique comme celles indiquées, correspondant au point *M* tel que $\left(\vec{i},\, \overrightarrow{OM}\right) = x$.

1) $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$; 2) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$; 3) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$;

4) $\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$; 5) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; 6) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$;

7) $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; 8) $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; 9) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

10) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; 11) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ et $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$; 12) $\cos\left(\frac{31\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{31\pi}{3}\right)$.



Exercice ❽

Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous forme d'une fraction.

$A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $B = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$