GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Objectifs :

• Dans le cadre de l'étude d'une suite, utiliser le registre de la langue naturelle, le registre algébrique, le registre graphique, et passer de l'un à l'autre.
• Proposer, modéliser une situation permettant de générer une suite de nombres.
• Déterminer une relation explicite ou une relation de récurrence pour une suite définie par un motif géométrique, par une question de dénombrement.
• Calculer des termes d'une suite définie explicitement, par récurrence ou par un algorithme.
• Conjecturer, dans des cas simples, la limite éventuelle d'une suite.

1. Notion de suites réelles

Activité 1 :

Leonardo Fibonacci (v. 1175 à Pise - v. 1250) est un mathématicien italien. Il avait, à l'époque, pour nom d'usage « Leonardo Pisano » (il est encore actuellement connu en français sous l'équivalent « Léonard de Pise »), et se surnommait parfois lui-même « Leonardo Bigollo » (bigollo signifiant « voyageur » en italien). S'il est connu pour la suite de Fibonacci, il joue surtout un rôle d'une importance considérable en faisant le lien entre le savoir mathématique des musulmans, notamment des chiffres indo-arabes, et l'Occident. *Source : wikipédia*

Fibonacci utilisait le symbole racine carrée $\sqrt{\ }$ pour les radicaux

On lui doit le fameux problème suivant : « Combien de couples de lapins obtiendrions-nous à la fin de l'année si, commençant avec un couple, chacun des couples produisait chaque mois un nouveau couple lequel deviendrait productif au second mois de son existence ? »
Répondre au problème de Fibonacci.

La formalisation du problème sera présentée par Édouard Lucas (1 842-1 891)

Définition 1. *Suite*

On appelle *suite* toute fonction *u* qui à tout entier naturel *n* associe un nombre réel *u*(*n*). Il s'agit en fait d'une « liste numérotée » de réels.

Exemple : Soit u la suite définie par $u(n)=2^n$. On a : $u(4)=2^4=16$ et $u(10)=2^{10}=1\,024$.

Définition 2. *Vocabulaire*

- **L'image de n par la suite u est notée u_n au lieu de $u(n)$.**
- **u_n est appelé terme de rang n ou terme général de la suite.**
- **u_{n+1} est le terme suivant u_n et u_{n-1} est le terme précédent u_n.**
- **La suite u est souvent notée (u_n).**

Remarque : • Si u_0 est le premier *terme* de la suite, u_n est le $n+1^{\text{ème}}$ terme.
• Si u_1 est le premier *terme* de la suite, u_n est le $n^{\text{ème}}$ terme.

Exercice ❶

1) Pour tout entier naturel n, $u_n = 3n^2 - 1$. Calculer u_0, u_1 et u_2.
2) Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = 2v_n - 1$.
Calculer v_1, v_2 et v_3.

corrigé en vidéo

Exercice ❷

Dans chacun des cas suivants, exprimer u_{n+1}, u_{n-1} et u_{2n} en fonction de n, pour tout entier n :

a) $u_n = 4n + 2$; b) $u_n = (-1)^n$; c) $u_n = n^2 + 4n$; d) $u_n = 2^{n-1}$

2. Modes de génération d'une suite

1) Définition explicite

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{1+n}$.

$$u_0 = \frac{1}{1+0} = 1 \; ; \; u_1 = \frac{1}{1+1} = 0{,}5 \; ; \; u_{10} = \frac{1}{1+10} = \frac{1}{11} \; ; \; u_{n+1} = \frac{1}{1+(1+n)} = \frac{1}{2+n}$$

Définition 3. *Définition explicite d'une suite*

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

Méthode pour calculer les termes d'une suite avec une calculatrice TI

tutoriel

2) Définition par récurrence

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = 4v_n - 6$.

$v_1 = 4v_0 - 6 = 12 - 6 = 6$ $\qquad v_2 = 4v_1 - 6 = 24 - 6 = 18$ $\qquad v_3 = 4v_2 - 6 = 72 - 6 = 66$

Définition 4. ***Définition par récurrence d'une suite***

Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir de son terme précédent.

Remarque : Le mot récurrence vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

Méthode pour calculer les termes d'une suite avec une calculatrice TI

tutoriel

Méthode pour calculer les termes d'une suite avec Python

tutoriel

Exercice ❸

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n par $v_{n+1} = 2v_n + 1$.

1) Calculer v_1, v_2 et v_3.

2) On donne la fonction suite suivante écrite en Python :

```
def suite(N) :
     i=0
     w=1
     for i in range (1,N+1) :
          w=2*w+1
     return w
```

a) Que permet de calculer cet algorithme ?
b) En saisissant `suite(5)`, quelle valeur renvoie la fonction ?

Exercice ❹

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout entier naturel n par $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

1) Calculer v_2 et v_3.

2) Compléter la fonction écrite en Python ci-dessous, afin qu'elle retourne la valeur de u_n choisie par l'utilisateur.

```
def suite(......) :
     i=0
     a_1 = 1
     a_2 = 1
     a = a_1+a_2
     for i in range (1,N+1) :
          a_1 =......
          a_2 =......
          a =......
     return ......
```

Exercice ❺

On considère trois fonctions suivantes programmées en langage Python.

```
def terme_u(n) :
    u=1/3
    for i in range (n) :
        u=1/u-1
    return u
```

```
def terme_v(n) :
    return n**2-2*n+1/n
```

```
def terme_w(n) :
    w=5
    for i in range (1,n+1) :
        w=w+3*(i-1)
    return w
```

1) Qu'obtient-on lorsqu'on appelle `terme_u(3)`, `terme_v(5)` et `terme_w(4)` dans la console ?
2) Préciser les modes de génération des suites associées à chacune de ces trois fonctions.

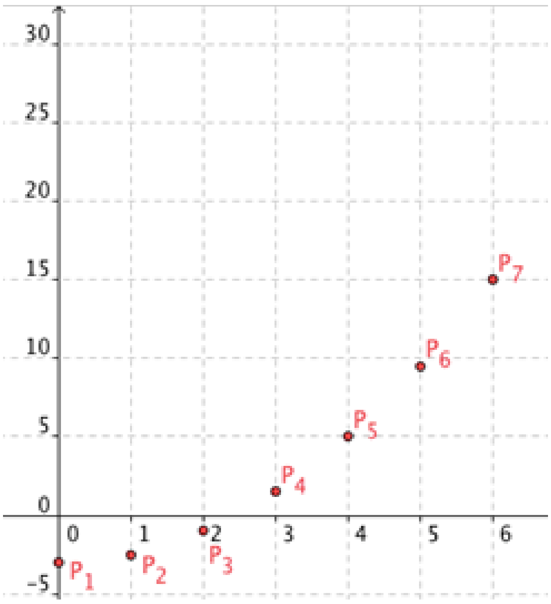
3) Représentation graphique d'une suite

Définition 5. ***Représentation graphique d'une suite***

La représentation graphique d'une suite (u_n) dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées $(n\,;u_n)$.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 0{,}5n^2 - 3$.
On calcule les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n	–3	–2,5	–1	1,5	5	9,5	15	21,5



tutoriel en vidéo

Méthode pour représenter graphiquement les termes d'une suite avec une TI

tutoriel

3. Sens de variation d'une suite

Définition 6. ***Sens de variation d'une suite***

- **Une suite (u_n) est strictement croissante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geq u_n$.**
- **Une suite (u_n) est strictement décroissante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \leq u_n$.**
- **Une suite (u_n) est constante si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n$.**
- **Une suite (u_n) est monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.**

Méthode pour déterminier le sens de variation d'une suite TI

Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n), on peut :

- Calculer, pour tout de **N**, la différence $u_{n+1} - u_n$, puis étudier le signe de cette différence.
- Si tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, on peut calculer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$, puis comparer ce quotient à 1.

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors (u_n) est croissante ; si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors (u_n) est décroissante.

a) Exemple 1

*Soit (u_n) la suite définie pour tout n de **N** par $u_n = 2^n + n$.*
Cette suite est-elle monotone ?

$$u_{n+1} - u_n = \left(2^{n+1} + n + 1\right) - \left(2^n + n\right) = 2^{n+1} - 2^n + 1 = 2^n \times (2-1) + 1 = 2^n + 1.$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$, c'est-à-dire $u_{n+1} > u_n$.
Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Exemple 2

*Soit (v_n) la suite définie pour tout n de **N** par $v_n = 1{,}01^n$.*
Cette suite est-elle monotone ?

Pour tout n de **N**, $1{,}01^n > 0$, d'où : $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1{,}01^{n+1}}{1{,}01^n} = 1{,}01^{n+1-n} = 1{,}01$.

Comme 1,01 > 1, alors la suite (v_n) est strictement croissante.

Exercice ❻

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n - 5$.
Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice ❼

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 4n + 4$.
Étudier les variations de (u_n).

corrigé en vidéo

Exercice ❽

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Étudier les variations de (u_n).

corrigé en vidéo

Propriété. ***Sens de variation d'une suite définie de façon explicite***

Soit f une fonction définie sur $[0\ ;+\infty[$.
Soit (u_n) la suite définie de façon explicite par $u_n = f(n)$. Alors :
- Si f est croissante sur $[0\ ;+\infty[$, alors (u_n) est croissante.
- Si f est décroissante sur $[0\ ;+\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

Exemple : *Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 1 + n^2$.*
Cette suite est-elle monotone ?

Soit la fonction f, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$, par $f(x) = 1 + x^2$.
La fonction f est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Par conséquent, la suite (u_n) est croissante.

Remarques : • Cette méthode ne s'applique pas aux suites définies de manière récurrente.
• Les réciproques sont fausses.

4. Notion de limite d'une suite

S'intéresser à la limite d'une suite (u_n), c'est étudier le comportement des termes u_n lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes. Des exemples nous permettent de conjecturer diverses situations.

1) Suite convergente

Pour tout n entier naturel non nul, on considère la suite (w_n) définie par : $\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_{n+1} = \sqrt{1 + w_n} \end{cases}$.

On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
w_n	1	1,414	1,554	1,598	1,612	1,617	1,6178	1,6179	1,6180

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 1,618, ou encore $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On dit que la suite (w_n) converge vers $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2) Suite divergente

Pour tout n entier naturel, on considère la suite (v_n) définie par : $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 2v_n + 5 \end{cases}$.

Calculons quelques termes de cette suite : $v_1 = 2v_0 + 5 = 6 + 5 = 11$;
$v_2 = 2v_1 + 5 = 22 + 5 = 27$; $v_3 = 2v_2 + 5 = 54 + 5 = 59$; …
Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.
On dit que la suite (v_n) diverge vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Exercice ❾

On considère les suites (u_n)et (v_n) définies par : $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$ et $v_n = n^2 + 1$.

Conjecturer les limites de ces deux suites.

corrigé en vidéo

Exercice ❿

Le 1er janvier 2020, Liam a placé 1 000 € sur un compte rémunéré à 4 % d'intérêts annuels.
Cela signifie qu'à chaque fin d'année, le capital présent depuis le 1er janvier est augmenté de 4 %.
Chaque 1er janvier à partir de 2021, il déposera 100 € supplémentaires sur le livret.
On note C_0 le capital de départ en euros. Puis, pour tout entier naturel n, on note C_n le capital à l'année $2016 + n$ après le dépôt de 100 €.
Déterminer la première année à partir de laquelle Liam disposera d'au moins 3 000 €.