

FONCTION POLYNÔME DU SECOND DEGRÉ

Cours

Première Spécialité maths

Objectifs :

- Étudier les variations d'une fonction polynôme du second degré.
- Utiliser la courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré.

Soit $f: x \mapsto ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) une fonction polynôme du second degré.

On rappelle que la forme canonique de $f(x)$ est de la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec

$$\alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}.$$

1. Variations d'une fonction polynôme du second degré

En partant de la forme canonique de la fonction f , on peut décrire l'expression de $f(x)$ par l'algorithme suivant :

Étapes	Programme de calcul	Mise en œuvre
1	Choisir un nombre x .	x
2	Lui soustraire α .	$x - \alpha$
3	Élever le résultat au carré.	$(x - \alpha)^2$
4	Multiplier le tout par a .	$a(x - \alpha)^2$
5	Ajouter β .	$a(x - \alpha)^2 + \beta$

Étape 1 : on choisit un nombre réel x .

Étape 2 : la fonction affine $x \mapsto x - \alpha$ est de coefficient directeur 1 positif ; elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

Étape 1	x	$-\infty$ α $+\infty$
Étape 2	$x \mapsto x - \alpha$	$-\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$

Étape 3 : la fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Étape 1	x	$-\infty$ α $+\infty$
Étape 3	$x \mapsto (x - \alpha)^2$	$+\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$

Supposons que a soit strictement positif

Étape 4 : multiplier par un nombre positif (ici a) ne modifie pas le sens de l'inégalité.

Étape 1	x	$-\infty$	α	$+\infty$
Étape 4	$x \mapsto a(x - \alpha)^2$	$+\infty$	0	$+\infty$

Étape 5 : ajouter un nombre (ici β) ne modifie pas le sens de l'inégalité.

Étape 1	x	$-\infty$	α	$+\infty$
Étape 5	$x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$	$+\infty$	0	$+\infty$

Supposons que a soit strictement négatif

Étape 4 : multiplier par un nombre négatif (ici a) modifie le sens de l'inégalité.

Étape 1	x	$-\infty$	α	$+\infty$
Étape 4	$x \mapsto a(x - \alpha)^2$	$-\infty$	0	$-\infty$

Étape 5 : ajouter un nombre (ici β) ne modifie pas le sens de l'inégalité.

Étape 1	x	$-\infty$	α	$+\infty$
Étape 4	$x \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta$	$-\infty$	0	$-\infty$

Propriété 1 : Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbf{R}$ par

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

♦ Si $a > 0$, alors f est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

$\beta = f(\alpha)$ est le minimum de la fonction f .

♦ Si $a < 0$, alors f est croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

$\beta = f(\alpha)$ est le maximum de la fonction f .

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x - 2$.

Déterminer les variations de f et construire son tableau de variation.

Tracer sa courbe représentative dans un repère.



[corrigé en vidéo](#)

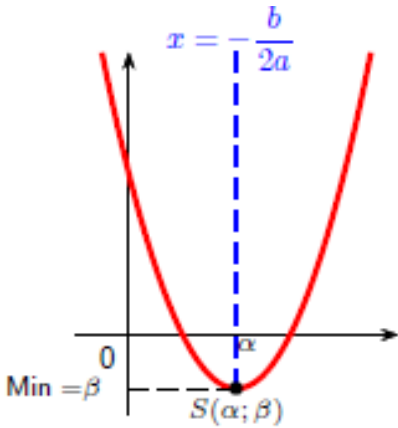
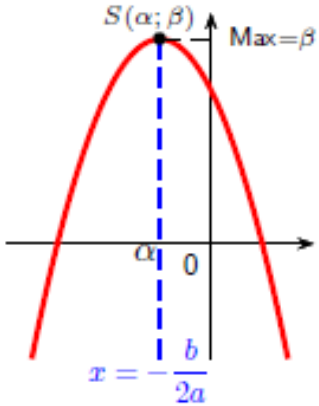
Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 12x - 1$.

- 1) Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = 3(x - 2)^2 - 13$.
- 2) Déterminer les variations de f et construire son tableau de variation.

2. Représentation graphique

Définition : Une fonction du second degré est représentée par une parabole $\mathcal{P}$ dont le sommet S a pour abscisse $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et pour ordonnée $\beta = f(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a}$.

Propriété 2 (admise) : Dans un repère orthogonal, la parabole qui représente la fonction f définie par $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a}$.

$a > 0$	$a < 0$
$\mathcal{P}$ est « orientée vers le haut »	$\mathcal{P}$ est « orientée vers le bas »
	



Méthode pour déterminer le sommet d'une parabole

Déterminer l'extremum et la valeur où il est atteint de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

Comme $a = -2$ est négatif, alors $\mathcal{P}$ est « orientée vers le bas », et ainsi la fonction f admet un maximum atteint en $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \times (-1)} = 2$.

$f(2) = -2^2 + 4 \times 2 = -4 + 8 = 4$; donc f admet un maximum 4 atteint en $x = 2$.



[autre résolution en vidéo](#)



Méthode pour déterminer le sommet d'une parabole

Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation $y = 2x^2 - 12x + 1$.

L'axe de symétrie de la parabole a pour équation $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3$.

Le sommet de la parabole a pour coordonnées $\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

$f(3) = 2 \times 3^2 - 12 \times 3 + 1 = 18 - 36 + 1 = -17$; donc le sommet a pour coordonnées $(3 ; -17)$.



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ③ : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x + 1$. On note $\mathcal{P}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

- 1) Déterminer les valeurs de x telles que $f(x) = 1$.
- 2) En déduire les coordonnées du sommet S de la parabole $\mathcal{P}$.
- 3) Donner les variations de la fonction f .
- 4) Construire la courbe représentative de la fonction f .

Exercice ④ : Dans un repère, une parabole $\mathcal{P}$ ayant un axe de symétrie parallèle à l'axe des ordonnées, passe par les points de coordonnées $O(0 ; 0)$, $A(1 ; 8)$, $B(4 ; 8)$.

- 1) Déterminer la fonction polynôme du second degré qui admet $\mathcal{P}$ pour parabole.
- 2) Calculer les coordonnées du sommet de cette parabole.