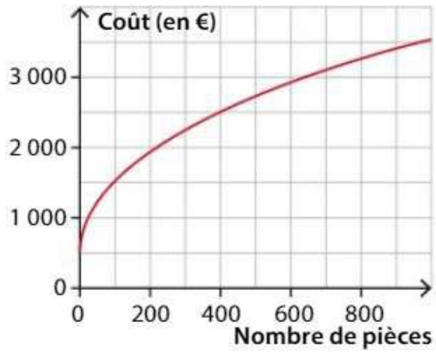
DERIVATION ET TANGENTES

Objectifs :
- *Calculer un taux de variation, la pente d'une sécante.*
- *Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal…*
- *Déterminer graphiquement un nombre dérivé par la pente de la tangente.*
- *Construire la tangente en un point à une courbe représentative connaissant le nombre dérivé.*
- *Déterminer l'équation de la tangente en un point à la courbe représentative d'une fonction.*
- *À partir de la définition, calculer le nombre dérivé en un point de la fonction carré. de la fonction inverse.*

1. Taux de variation

Activité 1 : fabrique de pieces automobiles

Une entreprise fabrique des pièces automobiles. Elle peut en produire jusqu'à 1000 par jour. Ce coût de fabrication de ces pièces dépend du nombre de pièces fabriquées.
On modélise le coût total de fabrication par une fonction C telle que $C(x)$ représente le coût (en euro) de fabrication pour x pièces créées.
On suppose que $C(x) = 100\sqrt{x} + 500$ et on considère la courbe représentative de la fonction C donnée ci-contre.



1. Taux de variation

On définit le taux de variation du coût de fabrication entre 0 et 400 pièces fabriquées par le quotient de la différence du coût sur la différence des nombres de pièces fabriquées.

Calculer le taux de variation du coût de fabrication entre 0 et 400 pièces fabriquées, puis le comparer à celui de l'augmentation de 400 à 900 pièces fabriquées.

2. Coût marginal

En économie, on utilise un indicateur, appelé coût marginal, qui se définit comme le coût de fabrication d'une unité supplémentaire après avoir déjà fabriqué x unités.
On note $C_m(x)$ le coût marginal en euro défini par $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$.

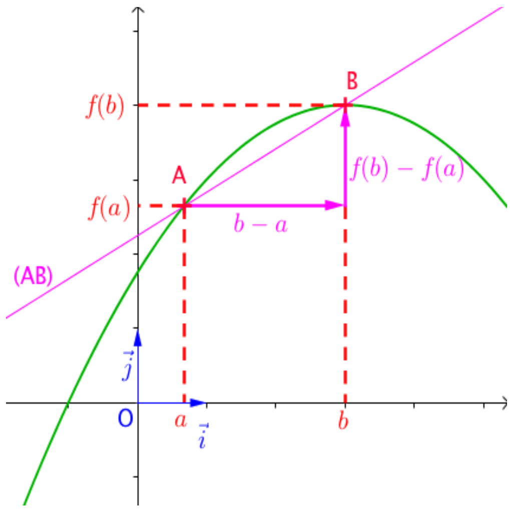
Calculer le coût marginal, arrondi au centime, pour 200 pièces fabriquées, puis le comparer à celui obtenu pour 800 pièces fabriquées.

Définition 1. *Taux de variation*

Soit une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soient a et b deux réels de I.

On appelle taux de variation de f entre a et b le réel : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Si $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\,\vec{j}\right)$, ce taux de variation est le coefficient directeur de la droite (AM) où A et M sont les points de $\mathscr{C}_f$ d'abscisses respectives a et b.



Exercice ❶

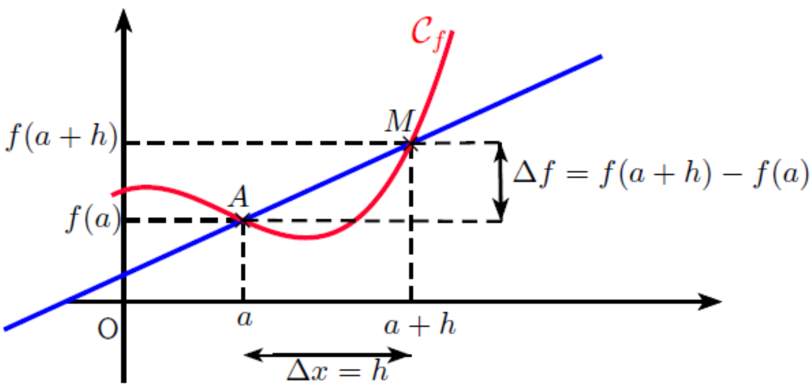
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+1$.

1) Déterminer le taux de variation de f entre 1 et 3.
2) Interpréter géométriquement ce taux de variation.

corrigé en vidéo

Remarque : En pratique, on prendra très souvent $b=a+h$ où h est un réel non nul tel que $a+h$ appartienne à I.

Ainsi le taux de variation de f entre a et $a+h$ le réel : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.



Exercice ❷

Soit g la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x+4}{x+2}$.

Soit h un réel non nul et tel que $2+h$ appartienne à $]-2\,;+\infty[$.

Calculer le taux de variation de g entre 2 et $2+h$.

2. Limite en zéro d’une fonction

Exemple : Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,;0[\cup[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(x+2)^2-4}{x}$.

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. Que se passe-t’il pour les valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-1	$-0{,}1$	$-0{,}01$	$-0{,}001$	…	0,001	0,01	0,1	1
$f(x)$	3	3,9	3,99	3,999	…	4,001	4,01	4,1	5

On remarque que $f(x)$ se rapproche de 4 lorsque x se rapproche de 0.

On dit que **la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 4** et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=4$

3. Nombre dérivé

Définition 2. *Nombre dérivé*

Dire que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel L, revient à dire que le taux de variation de f en a, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$. On cherche à calculer le nombre dérivé de f en 3.

● On commence à calculer $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{(3+h)^2-3^2}{h}=\frac{\cancel{3^2}+2\times3\times h+h^2-\cancel{3^2}}{h}=\frac{6h+h^2}{h}=\frac{6h}{h}+\frac{h^2}{h}=6+h$$

● On cherche la limité de $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$ lorsque h tend vers 0.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to0}(6+h)=6$$

Donc **6 est le nombre dérivé de la fonction f en 3**. On note : $\boldsymbol{f'(3)=6}$.

Exercice ❸

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-3x+1$. Déterminer $f'(2)$.

corrigé en vidéo

Exercice ❹

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$. Déterminer $f'(1)$.

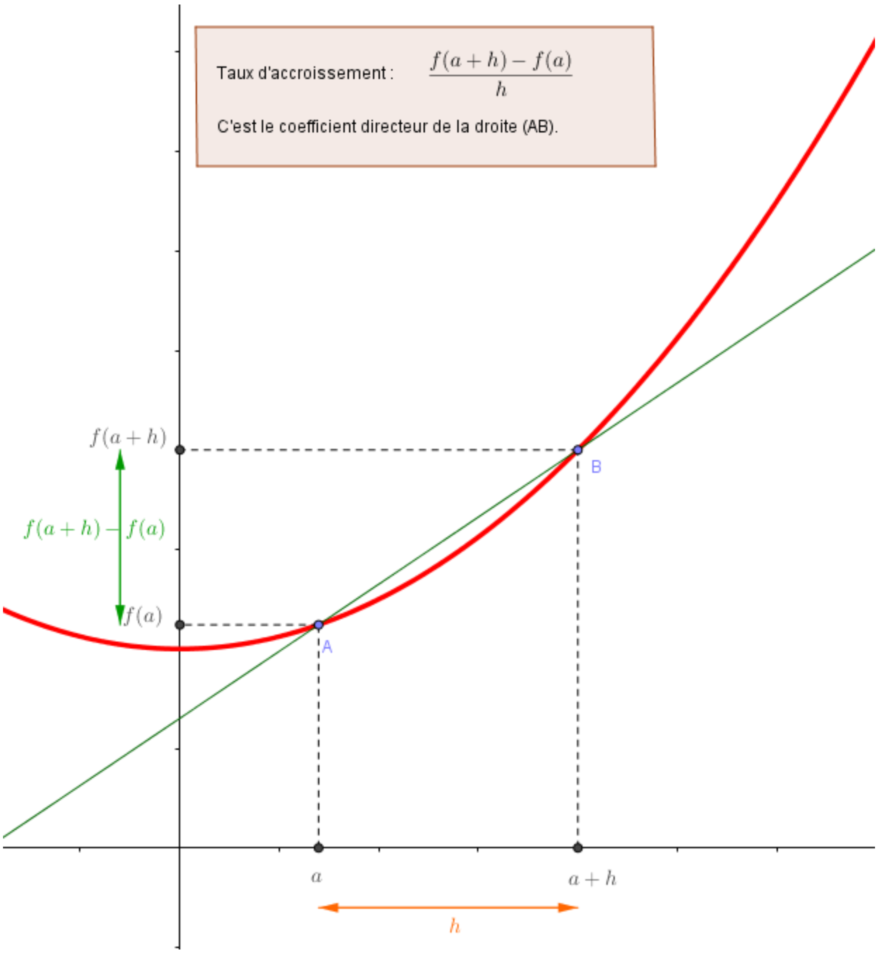
[corrigé en vidéo]

3. Tangente à une courbe

Définition 3. ***Tangente à une courbe***

Si f est dérivable en x_A dans un repère, la tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en x_A est la droite qui a pour coefficient directeur $f'(x_A)$ et qui passe par le point *A* de coordonnées $(x_A\ ;f(x_A))$.

Animation GeoGebra

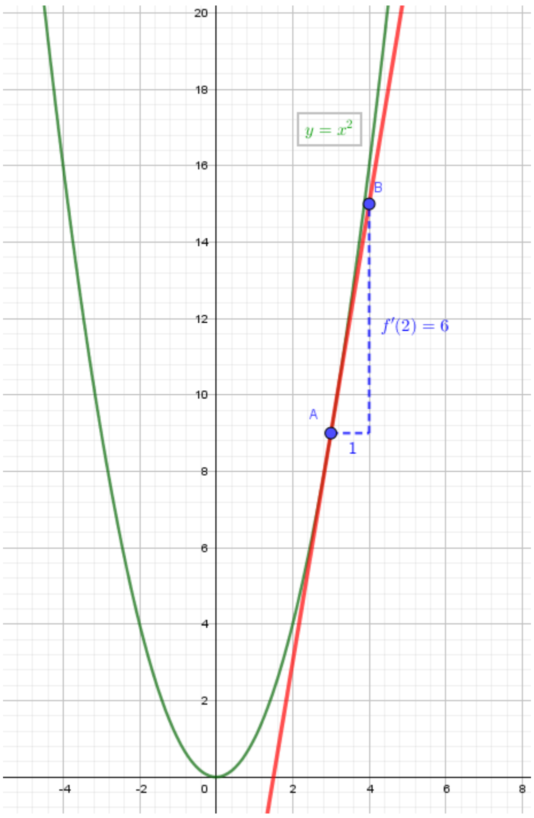


Méthode pour tracer une tangente à une courbe en un point et la tracer

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = x^2. On cherche à tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

D'après l'exemple du **2.**, on sait que $f'(3)=6$.
On place le point de coordonnées $(3\,;f(3))$, c'est-à-dire $(3\,;9)$

On trace la droite passant par ce point et de coefficient directeur $f'(3)=6$.



Propriété. *Tangente à une courbe*

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en x_A est la droite qui a pour équation $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$.

Démonstration : La tangente a pour pente $f'(x_A)$ donc son équation est de la forme :
$y = f'(x_A)x + p$ où p est l'ordonnée à l'origine.

Déterminons p : la tangente passe par le point $A(x_A\,;f(x_A))$, donc : $f(x_A) = f'(x_A)\times x_A + p$, c'est-à-dire $p = f(x_A) - f'(x_A)\times x_A$.

On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire : $y = f'(x_A)x + f(x_A) - f'(x_A)\times x_A$, soit $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$.

[démonstration en vidéo]

Méthode pour déterminer l'équation réduite d'une tangente à une courbe en un point

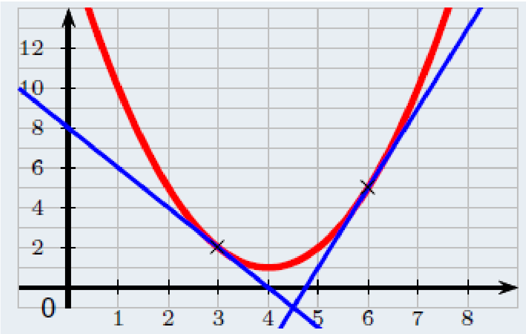
Soit f la fonction définie sur R par f(x) = x². Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

D'après la propriété, l'équation de cette tangente est de la forme $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$.
Or $f'(x_A) = f'(3) = 6$ et $f(x_A) = f(3) = 9$; alors $y = 6(x-3)+9 = 6x - 18 + 9 = 6x - 9$.
Donc **l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 est $y = 6x - 9$** .

Autre méthode : L'équation d'une droite est de la forme $y = mx + p$ où m est le coefficient directeur de la droite et p l'ordonnée à l'origine.
Ici $m = f'(3) = 6$; donc la droite a pour équation $y = 6x + p$.
Cherchons p : on sait que la tangente passe par $A(3\ ;\ 9)$; alors $y_A = 6x_A + p$, c'est-à-dire $9 = 6 \times 3 + p$ ou encore $9 = 18 + p$.
$9 = 18 + p$ équivaut à $9 - 18 = 18 + p - 18$, c'est-à-dire à $-9 = p$
Par conséquent, **l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 est $y = 6x - 9$.**

Exercice ❺

Déterminer graphiquement le nombre dérivé et une équation de la tangente en $x = 3$, puis en $x = 6$.



corrigé en vidéo

Exercice ❻
On lâche une bille sans vitesse initiale d'une haute tour.
On considérera que la distance qu'elle parcourt, depuis son lâcher à l'instant $t = 0$ jusqu'à l'instant t t, est $d(t) = 4{,}9t^2$ où t est en secondes et $d(t)$ est en mètres.
On souhaite évaluer sa vitesse instantanée 2 secondes après son lâcher.
Pour cela, on va calculer sa vitesse moyenne sur de petits intervalles de temps à partir de $t_0 = 2$.

1) Calculer la vitesse moyenne de la bille entre les instants $t_0 = 2$ et $t_1 = 2{,}1$.
2) Donner l'expression de la vitesse moyenne de la bille entre les instants $t_0 = 2$ et $t_1 = 2 + h$ où $h > 0$, en fonction de h.
3) Proposer une valeur de la vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 2$.

Exercice ❼

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Déterminer $f'(2)$.