

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Cours

Première Spécialité maths

Objectifs :

- Construire un arbre pondéré ou un tableau en lien avec une situation donnée. Passer du registre de la langue naturelle au registre symbolique et inversement.
- Utiliser un arbre pondéré ou un tableau pour calculer une probabilité.
- Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs (tirage au sort avec équiprobabilité d'un individu dans une population).
- Dans des cas simples, calculer une probabilité à l'aide de la formule des probabilités totales.
- Distinguer en situation $p_A(B)$ et $p_B(A)$, par exemple dans des situations de type « faux positifs ».
- Représenter une répétition de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau.

1. Activité d'approche d'une probabilité conditionnelle

Lors d'une vente promotionnelle dans une boutique, une étude sur 200 clients a montré que :

- 120 clients achète un tee-shirt.
- Parmi les autres clients, 40 achètent un jean.
- Parmi les clients qui achètent un tee-shirt, 24 achètent un jean.

On consulte, au hasard, la fiche d'un client. On considère les événements :

A : « le client achète un tee-shirt »

B : « le client achète un jean »

- 1) Calculer la probabilité $p(A)$ que le client achète un tee-shirt.
- 2) En déduire la probabilité $p(\bar{A})$ que le client n'achète pas de tee-shirt.
- 3) Compléter le tableau ci-dessous, donnant la répartition des fiches, en effectif, sachant que le client achète ou non un tee-shirt :

	Achète un tee-shirt	N'achète pas de tee-shirt	Total
Achète un jean			
N'achète pas de jean			
Total			

- 4) On sait que la fiche choisie est celle d'un client achète un tee-shirt. Quelle est la probabilité qu'il achète un jean ?

Définition 1. Probabilité conditionnelle

On appelle **probabilité conditionnelle de B sachant A** la probabilité que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé. Elle est notée $p_A(B)$

- 5) Parmi les clients qui n'achètent pas de tee-shirt, calculer la probabilité $p_{\bar{A}}(B)$ de ceux qui achètent un jean.
- 6) Donner la probabilité $p(A \cap B)$ que le client achète **à la fois** un tee-shirt et un jean.
- 7) Calculer $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$. Que remarque-t-on ?

Propriété 1. Probabilité conditionnelle

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \text{ ou } p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$$

Exercice ❶

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soient A l'événement « Le résultat est un pique » et B l'événement « Le résultat est un roi ».

- 1) Calculer la probabilité de l'événement « le résultat est un roi de pique ».
- 2) Déterminer la probabilité de l'événement A .
- 3) Calculer la probabilité $p_A(B)$.
- 4) La carte tirée est un roi. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse du roi de pique ?



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ❷

Un sachet de 100 bonbons contient 40 bonbons acidulés, les autres bonbons sont à la guimauve. 18 des bonbons à la guimauve sont au parfum orange et 10 bonbons sont acidulés et au parfum orange. Les bonbons qui ne sont pas au parfum orange sont à la fraise. On choisit un bonbon au hasard dans ce sachet.

On note :

- ♦ A : l'événement : « le bonbon est acidulé » ;
- ♦ G : l'événement : « le bonbon est à la guimauve » ;
- ♦ F : l'événement : « le bonbon est à la fraise » ;
- ♦ O : l'événement : « le bonbon est au parfum orange ».

- 1) J'ai pris une guimauve. Déterminer la probabilité que cette guimauve soit à l'orange.
- 2) J'ai pris un bonbon acidulé. Déterminer la probabilité qu'il soit à l'orange.
- 3) J'ai pris un bonbon. Déterminer la probabilité que ce soit une guimauve à l'orange.

Remarque : La probabilité conditionnelle suit les règles et lois de probabilités vues dans les classes antérieures. En particulier, on a les propriétés suivantes :

Propriété 2. Règles et lois de la probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements avec $p(A) \neq 0$.

- $0 \leq p_A(B) \leq 1$.
- $p_A(A) = 1$.
- $p_A(\bar{B}) = 1 - p_A(B)$.

Exercice ③

Dans une entreprise qui compte 360 employés, on compte 60 % d'hommes et parmi ceux-là, 12,5 % sont des cadres.

Par ailleurs, 87,5 % des femmes de cette entreprise sont ouvrières ou techniciennes.

1) Compléter le tableau suivant :

	Hommes (H)	Femmes (F)	Total
Cadres (C)			
Ouvriers, techniciens (O)			
Total			

2) Déterminons la probabilité de rencontrer un cadre sachant c'est un homme.

2. Arbre pondéré

Deux ateliers produisent des paires de chaussures. Le premier atelier produit 6 000 paires. Le deuxième produit 4 000 paires. 120 paires sont défectueuses et proviennent du premier atelier. Si on ne prélève que des paires venant du deuxième atelier, la probabilité qu'une paire soit défectueuse est égale à 0,3.

On choisit, au hasard, une paire de chaussures. On considère les événements :

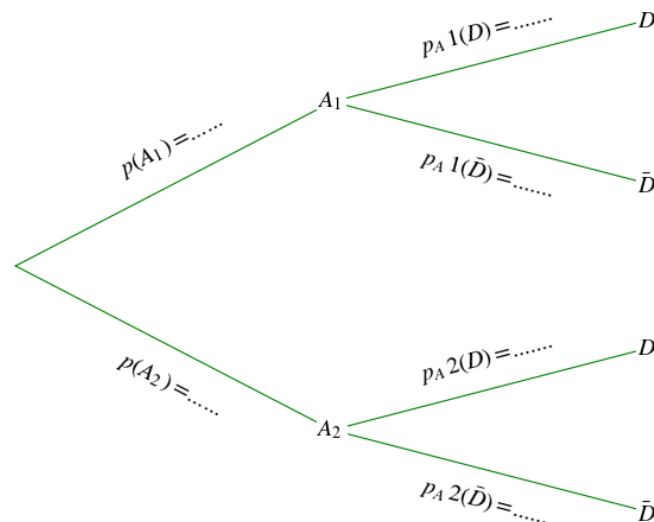
A_1 : « la paire de chaussure provient du premier atelier »

A_2 : « la paire de chaussure provient du deuxième atelier »

D : « la paire de chaussure est défectueuse »

1) Quelle est la probabilité qu'une paire soit défectueuse sachant qu'elle provient du premier atelier ?

2) Compléter l'arbre pondéré suivant :



Règle 1. Arbre pondéré

Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.

3) Quelle est la probabilité qu'une paire de chaussures soit défectueuse et provienne du deuxième atelier ?

Règle 2. Arbre pondéré

Dans un arbre pondéré, pour calculer la probabilité d'un chemin, on multiplie les probabilités des branches de ce chemin.

4) Quelle est la probabilité qu'une paire de chaussures soit défectueuse ?

Règle 3 : formule des probabilités totales. Arbre pondéré

La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la somme des probabilités de chacun de ces chemins.

Exercice ④

Lors d'une épidémie chez des bovins, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt chez un animal, on peut le guérir ; sinon la maladie est mortelle.

Un test est mis au point et essayé sur un échantillon d'animaux dont 2 % est porteur de la maladie.

On obtient les résultats suivants :

- si un animal est porteur de la maladie, le test est positif dans 85 % des cas ;
- si un animal est sain, le test est négatif dans 95 % des cas.

On choisit de prendre ces fréquences observées comme probabilités pour toute la population et d'utiliser le test pour un dépistage préventif de la maladie.

On note respectivement M et T les événements « Être porteur de la maladie » et « Avoir un test positif ».

- 1) Un animal est choisi au hasard. Quelle est la probabilité que son test soit positif ?
- 2) Si le test du bovin est positif, quelle est la probabilité qu'il soit malade ?



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ⑤

Liam s'est créé une adresse électronique.

Au bout de quelques semaines, il constate que 90% des messages reçus dans sa boîte mail sont des spams, c'est-à-dire des messages indésirables. Il achète donc un logiciel qui classe les messages en deux catégories : normaux et indésirables.

Après l'utilisation, il constate que 1 % des messages normaux (non spams) reçus sont classés en indésirables. Il constate également que 11,7 % des messages sont classés normaux.

On note S l'événement « le message reçu est un spam » et N l'événement « le message est classé normal ».

- 1) Traduire cette situation par un arbre pondéré.
- 2) Calculer la probabilité qu'un message soit classé normal, alors que c'est un spam.

3. Événements indépendants

Définition 2. Événements indépendants

On dit que deux événements A et B de probabilité non nulle sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Exemple : On lance un dé équilibré à 6 faces et on note le numéro de sa face supérieure.

On considère les événements suivants :

A : « le numéro est un nombre pair »

B : « le numéro est 2 »

C : « le numéro est un nombre supérieur ou égal à 5 ».

Alors $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{6}$; $P(C) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

De plus, $P(A \cap B) = P(\text{"le numéro est 2"}) = \frac{1}{6}$ et $P(A \cap C) = P(\text{"le numéro est 6"}) = \frac{1}{6}$.

Or $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$; donc A et B ne sont pas indépendants.

De même, $P(A) \times P(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$; donc A et C sont indépendants.

Remarque : Ne pas confondre événements indépendants et événements incompatibles.

Deux événements A et B sont incompatibles si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Exercice ⑥

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soient R l'évènement « On tire un roi » et T l'évènement « On tire un trèfle ».

- 1) Déterminer la probabilité de l'évènement « On tire le roi de trèfle ».
- 2) Les événements R et T sont-ils indépendants ?



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ⑦

Dans une population, un individu est atteint par la maladie m avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie n avec une probabilité égale à 0,01.

On choisit au hasard un individu de cette population.

Soient M l'évènement « L'individu a la maladie m » et N l'évènement « L'individu a la maladie n ». On suppose que les événements M et N sont indépendants.

Calculer la probabilité de l'évènement A : « L'individu a au moins une des deux maladies ».



[corrigé en vidéo](#)

Propriété 2. Événements indépendants

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle de Ω .

- A et B sont indépendants si, et seulement si, $p_A(B) = p(B)$
- A et B sont indépendants si, et seulement si, $p_B(A) = p(A)$

Démonstration : A et B sont indépendants si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, ce qui équivaut à $P_A(B) \times P(A) = P(A) \times P(B)$.

Comme $P(A) \neq 0$, alors l'égalité précédente équivaut à $P_A(B) = P(B)$.

La démonstration est analogue pour l'autre propriété.

Exercice 8

On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant les six jetons :

- ♦ Trois jetons rouges marqués 1, 2, 3 ;
- ♦ Deux jetons bleus marqués 1, 2 ;
- ♦ Un jeton vert marqué 1.

On considère les événements R : « le jeton est rouge », U : « le numéro est 1 » et D : « le numéro est 2 ».

- 1) Les événements R et U sont-ils indépendants ?
- 2) Les événements R et D sont-ils indépendants ?

Propriété 3. Événements indépendants

Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Démonstration : $P(\bar{A} \cap B) = P(B \cap \bar{A}) = P(B) \times P_B(\bar{A}) = P(B) \times (1 - P_B(A))$.

Comme A et B sont indépendants, alors $P_B(A) = P(A)$.

D'où $P(\bar{A} \cap B) = P(B) \times (1 - P(A)) = P(B) \times P(\bar{A})$.

Par conséquent, $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Exercice 9

Lors d'un week-end prolongé, Bison futé annonce qu'il y a 42 % de risque de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A6 et 63 % sur l'autoroute A7.

Soit A l'événement « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A6. »

Soit B l'événement « On tombe dans un bouchon sur l'autoroute A7. »

On suppose que les événements A et B sont indépendants.

Calculer la probabilité de tomber dans un bouchon sur l'autoroute A7, mais pas sur l'autoroute A6.



[corrigé en vidéo](#)

4. Succession de deux épreuves indépendantes

Définition 3. Succession de deux épreuves indépendantes

Lorsque deux expériences aléatoires se succèdent et que les résultats de la première expérience n'ont aucune influence sur la seconde, on dit qu'il s'agit d'une succession de deux épreuves indépendantes.

Exemple : On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat. On répète ainsi la même expérience (lancer un dé) et les expériences sont indépendantes l'une de l'autre (un lancer n'influence pas le résultat d'un autre lancer).

Exercice 10

Dans une population, 13 % des personnes sont gauchères. On interroge au hasard deux individus et on suppose la population suffisamment importante pour considérer ces deux épreuves indépendantes.

- 1) Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
- 2) Calculer la probabilité que les deux personnes soient gauchères.
- 3) Calculer la probabilité qu'exactement l'une de ces personnes soit gauchère.

Exercice

Un kangourou se trouve en un point d'une route déserte d'Australie occidentale.

À chaque seconde, il saute d'un mètre vers l'avant ou vers l'arrière avec la même probabilité.

On appelle origine la position initiale du kangourou sur la route.

- 1) Écrire un algorithme qui simule et affiche la position du kangourou après un saut.
- 2) Écrire un second algorithme qui affiche la position du kangourou après n sauts.