

APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

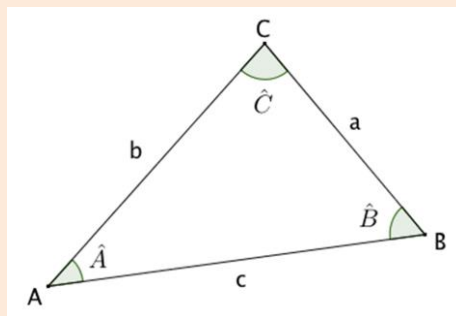
Objectifs :

- Utiliser le produit scalaire pour démontrer une orthogonalité, pour calculer un angle, une longueur dans le plan ou dans l'espace.

1. Formule d'Al-Kashi

Propriété 1. Formule d'Al-Kashi

Dans le triangle ABC suivant, on a : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \times \cos(\widehat{BAC})$.



Démonstration : On a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. D'où :

$$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AC^2 + AB^2 - 2 \times AC \times AB \times \cos(\widehat{BAC}).$$

Par conséquent, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.



[démonstration en vidéo](#)

Remarques : • De la même façon, on montre que :

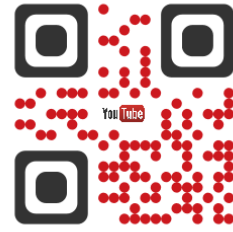
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \text{ et } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

- Si le triangle est rectangle en A, alors $A = \frac{\pi}{2}$ et $\cos A = 0$; d'où : $a^2 = b^2 + c^2$.

On retrouve le théorème de Pythagore.

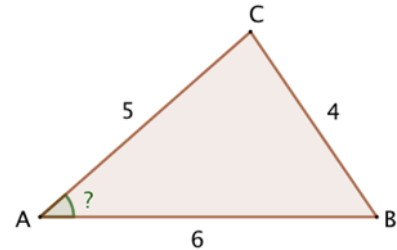


Al-Kashi est un mathématicien, astronome, né en Iran en 1380 et mort en 1430. On lui doit le calcul du nombre π avec une précision de 16 décimales. Son ouvrage *Miftah al hisab* (*La clé de l'arithmétique*) sera un ouvrage de référence durant des siècles.



Exercice ❶

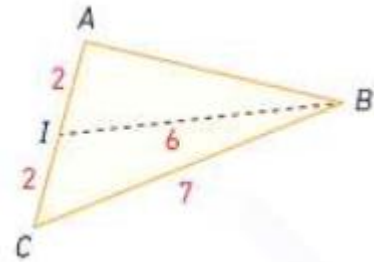
On considère la figure ci-contre.
Calculer la mesure de l'angle BAC au degré près.



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ❷

On considère un triangle ABC direct tel que : $AC = 4$ et $BC = 7$.
On note I le milieu de $[AC]$. De plus, $IB = 6$.
Déterminer la longueur AB , puis une mesure de l'angle CAB .



2. Propriété caractéristique du cercle

Propriété 2. *Propriété caractéristique du cercle*

Soit A et B deux points distincts du plan.

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration : Le cercle $(\mathcal{C})$, privé des points A et B , est l'ensemble des points M du plan tels que le triangle MAB est rectangle en M , c'est à dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$.

D'autre part, si $M = A$ ou $M = B$, alors $\overrightarrow{MA} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, et on a encore $\overrightarrow{MA} \bullet \overrightarrow{MB} = 0$.



[démonstration en vidéo](#)

Exercice ③

Dans un repère orthonormal, on donne les points $A(1 ; 3)$, $B(2 ; 5)$ et $C(-1 ; 4)$.

- a) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en A .
- b) Déterminer une équation du cercle circonscrit au triangle ABC .
- c) Déterminer une équation de la médiatrice de $[BC]$.