

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Objectifs :

- Lier la représentation graphique des fonctions cosinus et sinus et le cercle trigonométrique.
- Traduire graphiquement la parité et la périodicité des fonctions trigonométriques.

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dérivabilité et variations

Propriété 1. Dérivabilité

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x , $\cos'(x) = -\sin(x)$ et $\sin'(x) = \cos(x)$.

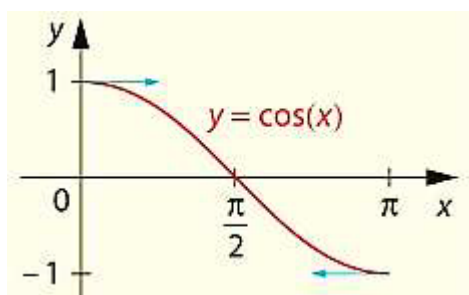
Étudions alors les variations des fonctions cosinus et sinus sur $[0 ; \pi]$.

♦ Sur $[0 ; \pi]$, $\sin(x) \dots\dots 0$; par suite, pour tout x de $[0 ; \pi]$, $\cos'(x) \dots\dots 0$.

On en déduit que :

x	0	π
$\cos'(x)$		
$\cos$		

On peut alors tracer la représentation graphique de la fonction cosinus sur $[0 ; \pi]$:

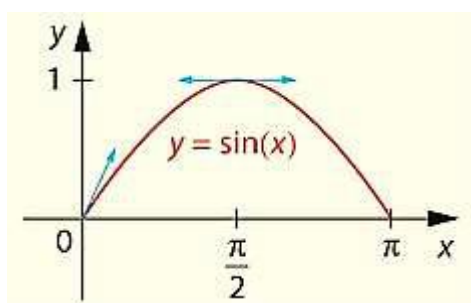


♦ Sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(x) \dots\dots 0$ et sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, $\cos(x) \dots\dots 0$; par suite, pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin'(x) \dots\dots 0$, et pour tout x de $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, $\sin'(x) \dots\dots 0$

On en déduit que :

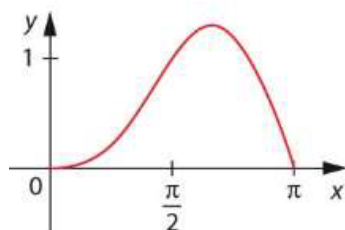
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(x)$			
$\sin$			

On peut alors tracer la représentation graphique de la fonction sinus sur $[0 ; \pi]$:



Exercice ❶

Soit f la fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par $f(x) = (1 - \cos(x)) \sin(x)$. Cette fonction est représentée ci-dessous :



- 1) Calculer $f'(x)$.
- 2) Montrer que $f'(x) = (1 + 2\cos(x))(1 - \cos(x))$.
- 3) En déduire le sens de variation de f .

2. Parité

Rappel. Parité d'une fonction

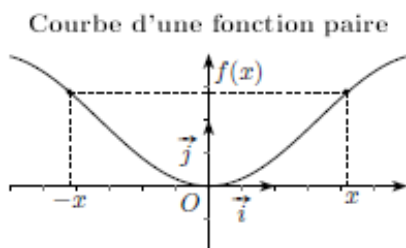
On dit qu'une fonction f est paire si pour tout réel x , $f(-x) = f(x)$.

On dit qu'une fonction f est impaire si pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$.

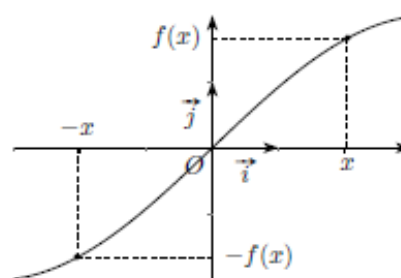
Propriété 2. Conséquences

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Courbe d'une fonction impaire



On a vu dans le chapitre de trigonométrie que, pour tout réel x , $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$. On en déduit que :

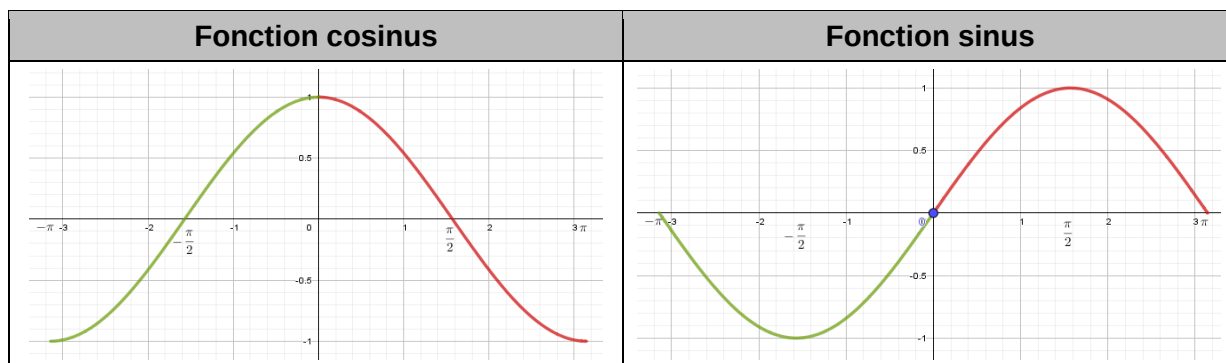
Propriété 3. Parité des fonctions cosinus et sinus

La fonction cosinus est paire.

Sa représentation graphique de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La fonction sinus est impaire.

La représentation graphique de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Exercice 2

Démontrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x) - \sin(2x)$ est impaire.



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ③

Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ est impaire.

Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

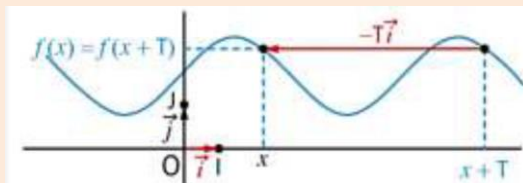
3. Périodicité

Définition 2. Périodicité d'une fonction

Une fonction f est dite T -périodique sur un intervalle I , si pour tout réel x de I , $f(x+T) = f(x)$.

Propriété 4. Périodicité et représentation graphique

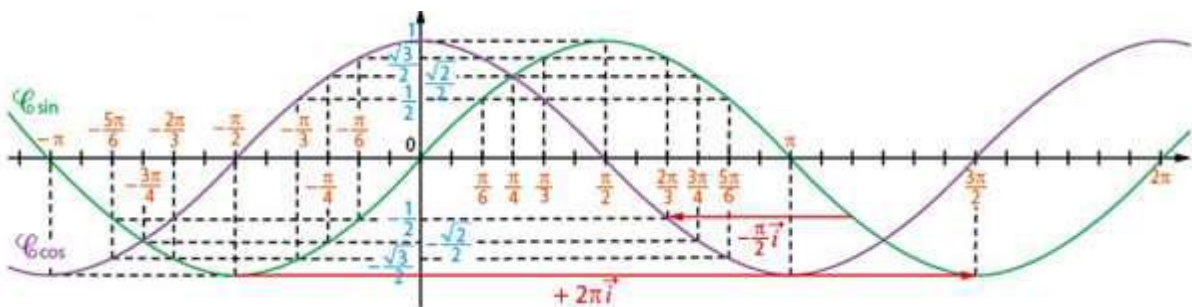
Si f est T -périodique, alors sa courbe représentative est invariante par la translation de vecteur $-T\vec{i}$.



On a vu dans le chapitre de trigonométrie que, pour tout réel x , $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$. On en déduit que :

Propriété 5. Périodicité des fonctions cosinus et sinus

Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques de période 2π .
Les courbes représentatives des fonctions cosinus et sinus sont invariantes par la translation de vecteur $-2\pi\vec{i}$.



Exercice ④

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - \frac{1}{2}$.

1) Étudier la parité de la fonction f .



[corrigé en vidéo](#)

2) Démontrer que f est périodique de période π .



[corrigé en vidéo](#)

3) Représenter graphiquement la fonction f .



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ⑤

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(4x) - \sin^2(x)$.

1) Tracer à l'aide d'une calculatrice, la courbe représentative de cette fonction dans un repère orthonormé.

2) Montrer que, pour tout réel x , $g(-x) = g(x)$. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

3) a) Conjecturer graphiquement que f est périodique et donner sa période.

b) Démontrer cette conjecture par le calcul.

4. Représentations graphiques

