FONCTION EXPONENTIELLE

Objectifs :

• *Transformer une expression en utilisant les propriétés algébriques de la fonction exponentielle.*
• *Résoudre des équations ou inéquations contenant des exponentielles.*
• *Pour une valeur numérique strictement positive de k, représenter graphiquement les fonctions $t \mapsto e^{-kt}$ et $t \mapsto e^{kt}$.*
• *Modéliser une situation par une croissance, une décroissance exponentielle (par exemple évolution d'un capital à taux fixe, décroissance radioactive).*

1. Définition de la fonction exponentielle

Définition 1. ***Fonction exponentielle***

Il existe une, et une seule, fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction s'appelle fonction exponentielle et se note $\exp$.

Point historique : Jean Bernoulli introduisit les fonctions exponentielles dans une correspondance avec Leibniz en 1694. Le mot « exponentiel » apparaît pour la première fois dans la réponse de Leibniz.

Jean Bernoulli

Gottfried Wilhelm Leibniz

2. Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété 1. ***Relation fonctionnelle***

Quels que soient les réels a et b, $\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Propriété 2. ***Propriétés algébriques***

Quels que soient les réels a et b, et l'entier n :

1) $\exp(a) \times \exp(-a) = 1$

2) $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$

3) $(\exp(a))^n = \exp(na)$

Propriété 3. ***Signe de exp(x)***

Pour tout réel x, $\exp(x) > 0$.

Démonstration : Soit un réel x. $\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2}\right) \times \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$.

Comme $\exp\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$, on en déduit que $\exp(x) > 0$ pour tout réel x.

3. La notation e^x

Définition 2. ***Nombre e***

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e, c'est-à-dire exp (1) = e.

Ce nombre e est un réel voisin de 2,718.
Le premier à s'intéresser de façon sérieuse au nombre e est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783). C'est à lui que nous devons le nom de ce nombre (il l'utilisa la première fois en 1728. Non pas qu'il s'agisse de l'initiale de son nom mais peut être car e est la première lettre du mot exponentiel.
Dans « *Introductio in Analysin infinitorum* » publié en 1748,

Euler explique que : $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$

Rappelons que par exemple 5 ! se lit "factoriel 5" et est égal à 1 x 2 x 3 x 4 x 5.
Par cette formule, il obtient une estimation de e avec 18 décimales exactes.
Nous devons aussi à Euler la démonstration de l'irrationalité de e.

D'après la propriété 2, pour tout entier relatif n, $\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n = e^n$.

Définition 3. ***Nouvelle notation de exp(x)***

Pour tout réel x, $\exp(x)$ sera noté e^x.

Avec cette nouvelle notation, on peut ainsi résumer l'ensemble des propriétés de la fonction exponentielle :

Propriété 4. ***Propriétés algébriques***

Quels que soient les réels a et b, et l'entier n :

$e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $e^{na} = \left(e^a\right)^n$

Exercice ❶

Simplifier l'écriture des nombres suivants $A = \dfrac{e^7 \times e^{-4}}{e^{-5}}$, $B = \left(e^5\right)^{-6} \times e^{-4}$ et $C = \dfrac{1}{\left(e^{-3}\right)^2} \times \dfrac{\left(e^{-1}\right)^4}{e^2 \times e^{-6}}$

corrigé en vidéo

Exercice ❷

Simplifier les expressions suivantes : $A = e^{2x+1} \times e^{-x-1}$; $B = e^{-3x-2} \times e^{x+1}$ et $C = \dfrac{e^{4x+1}}{e^{x+3}}$.

Exercice ❸

1) Soit $f(x) = \left(e^x + e^{-x}\right)^2 - e^x\left(e^x + e^{-3x}\right)$. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = 2$.

2) Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$.

4. Étude de la fonction exponentielle

D'après la définition de la fonction exponentielle, on en déduit que :

Propriété 5. ***Dérivabilité***

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à elle-même : $\exp'(x) = \exp(x)$.

D'après la propriété 3, pour tout réel x, $\exp(x) > 0$. Par suite :

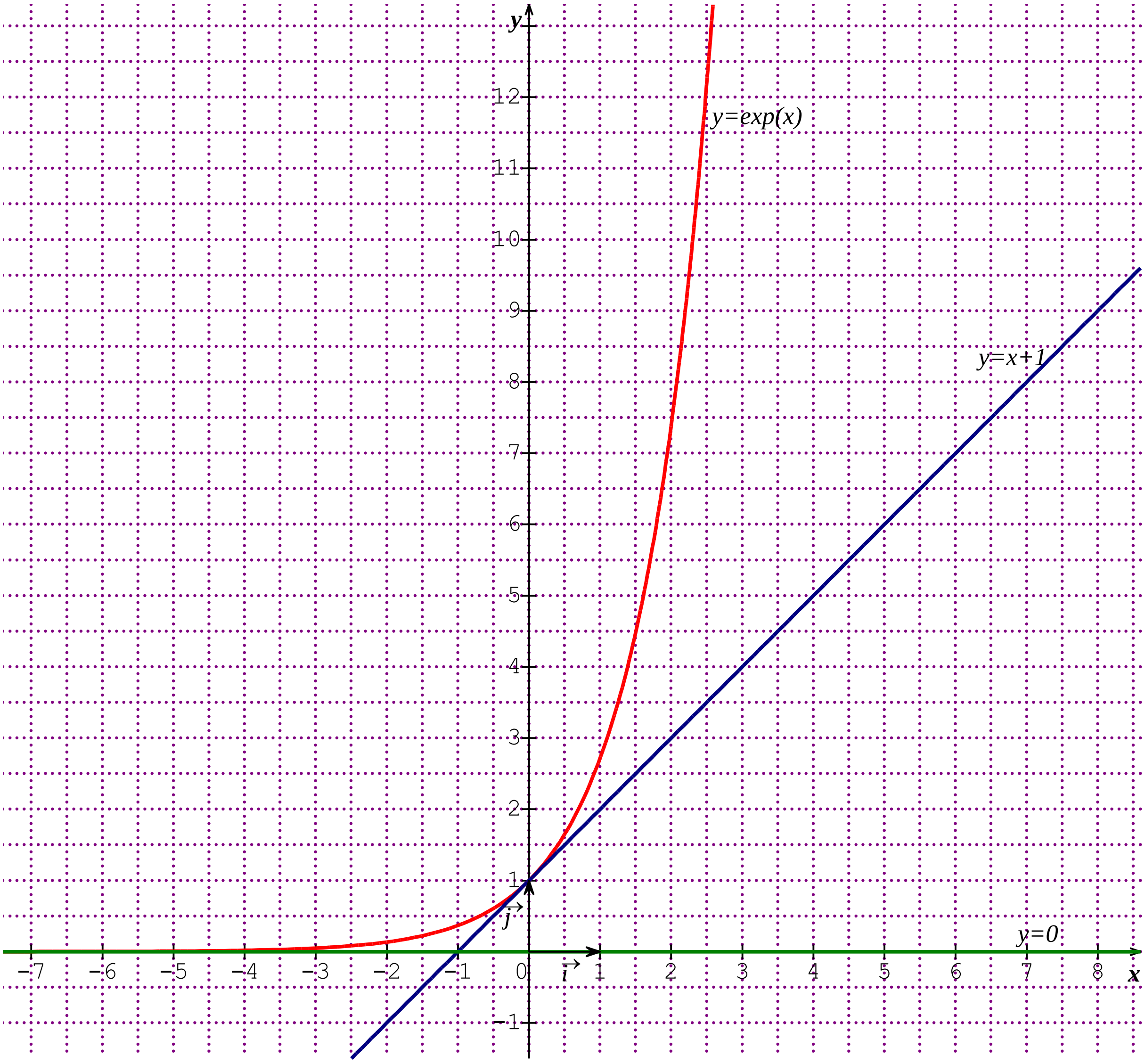
Propriété 6. ***Sens de variation***

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de variations suivant

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	+
exp	$0 \nearrow +\infty$

La tangente T_0 au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x+1$. De plus, pour tout nombre réel x, $e^x \geq x+1$ (voir démonstration de la propriété 3) ; donc ($\mathscr{C}$) est au-dessus de cette tangente.
La tangente T_1 au point d'abscisse 1 a pour équation $y = ex$. Elle passe par l'origine du repère.



Exercice ❹

Dériver les fonctions définies par :

a) $f(x)=4x-3e^x$; b) $g(x)=(x-1)e^x$; c) $h(x)=\dfrac{e^x}{x}$

corrigé en vidéo

Exercice ❺

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)e^x$

a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.

corrigé en vidéo

Propriété 7.

Quels que soient les réels x et y : $e^x=e^y \Leftrightarrow x=y$ et $e^x<e^y \Leftrightarrow x<y$

Exercice ❻

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3}=e^{-2x}$.

corrigé en vidéo

Exercice ❼

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1}\geq 1$.

corrigé en vidéo

Exercice ❽

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $e^{2x+1}=1$; $e^{-x}=1$ et $e^{-3x+2}=e^{2x}$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $e^{-3x+1}\leq 1$ et $e^{2x+1}>e^{4x-5}$.

5. Exponentielle et suite géométrique

Pour tout entier n, $e^{na}=\left(e^a\right)^n$; par suite :

Propriété 8. ***Suite géométrique***

La suite $\left(e^{na}\right)$ est une suite géométrique de raison e^a .

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $u_n=e^{3n+2}$. On a : $u_n=e^{3n}\times e^2=\left(e^3\right)^n\times e^2$; donc (u_n) est une suite géométrique de raison e^3 et de premier terme $u_0=e^2$.

6. Fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$

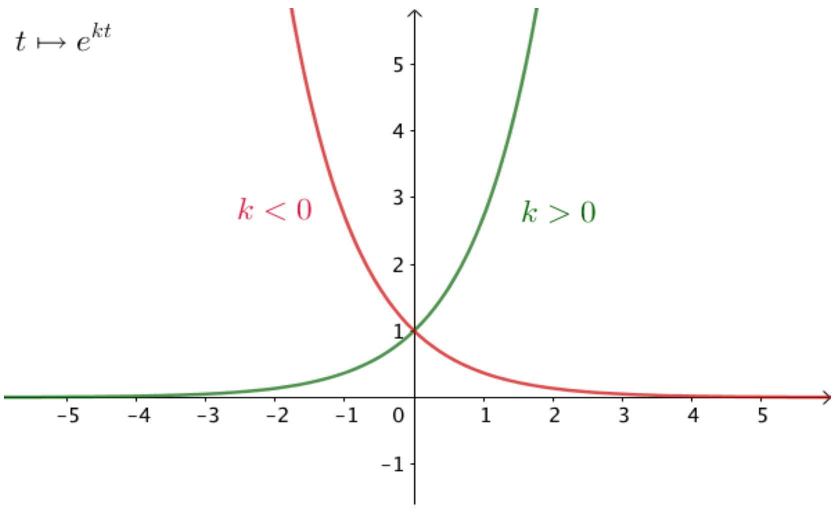
Propriété 9. ***Dérivabilité***

Soit f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(t) = e^{kt}$, où k est un réel non nul.
f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel t, $f_k'(t) = ke^{kt}$

Comme $\exp(kt) > 0$ pour tout réel t, alors le signe de $f_k'(t)$ dépend de celui de k.
On en déduit que :

Propriété 10. ***Sens de variation***

Si $k > 0$, la fonction f_k est croissante.
Si $k < 0$, la fonction f_k est décroissante.



Exercice ❾
Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ et telle que $f'(t) = 0{,}14 f(t)$.

1) Montrer que la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ convient.
2) On suppose que $f(0) = 50\ 000$. Déterminer A.
3) Déterminer les variations de f sur $[0 ; 10]$.
4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

corrigé en vidéo

Exercice ❿

On admet que la concentration d'un médicament dans le sang peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 15]$ par : $f(x)=(x+2)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1) On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Justifier que $f'(x)=-0,5xe^{-0,5x}$, puis en déduire le tableau de variations de f.

2) On admet que l'équation $f(x)=0,1$ admet une unique solution α dans $[0\ ;\ 15]$.
Déterminer une valeur approchée de α d'amplitude un dixième.

3) On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?