VARIABLES ALÉATOIRES

Objectifs :

- *Interpréter en situation et utiliser les notations {X = a}, {X ⩽ a}, P(X = a), P(X ⩽ a).*
- *Modéliser une situation à l'aide d'une variable aléatoire.*
- *Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire.*
- *Calculer une espérance, une variance, un écart type.*
- *Utiliser la notion d'espérance dans une résolution de problème.*

1. Variable aléatoire et loi de probabilité

1) Variable aléatoire

On lance un dé non truqué à six faces numérotées de 1 à 6 **et on note** le nombre figurant sur la face supérieure du dé.
L'ensemble de toutes les issues possibles Ω = {… ; … ; … ; … ; … ; …} s'appelle l'univers des possibles.
On considère l'événement A : "On obtient un résultat impair."
On a donc : A = {… ; … ; …}.
On considère l'événement élémentaire B : "On obtient un 2".
On a donc : B = {…}.

Vocabulaire.

On appelle événement toute partie de l'univers.
Une éventualité ω appartient à l'univers Ω (on note ω ∈ Ω).
Un événement A est inclus dans l'univers Ω (on note A ⊂ Ω).

Exemple : *Par exemple, on peut considérer l'événement A : « obtenir un nombre pair ».*

On a : A = ……………….

Remarque : Lorsqu'une éventualité ω appartient à un événement A, on dit que ω réalise A.

Reprenons l'expérience précédente, on considère le jeu suivant :
- Si le résultat est 1, 2 ou 3, on gagne 1 €.
- Si le résultat est 4, on gagne 3 €.
- Si le résultat est 5 ou 6, on perd 2 €.

On a défini ainsi une variable aléatoire X sur Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6} qui peut prendre les valeurs …, … ou ... . On note $X(\Omega)=\{\text{...... ; ...... ; ......}\}$.

On a donc : $X(1)=X(2)=X(3)=......$, $X(4)=......$ et $X(5)=X(6)=......$.

Définition 1. ***Variable aléatoire***

Soit Ω l'ensemble des résultats d'une expérience aléatoire.

• On appelle variable aléatoire toute fonction X de Ω dans R qui, à tout élément de Ω, fait correspondre un nombre réel x.
• L'événement de Ω, noté $\{X = x\}$, est l'ensemble des éléments de Ω qui ont pour image x par X.
• L'ensemble image de Ω par X est l'ensemble de toutes les images des éléments de Ω par X. Cet ensemble est noté Ω', ou $X(\Omega)$.

Remarques : • On dit que X est une **variable aléatoire discrète** puisqu'elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Ce sera toujours le cas dans ce chapitre car, comme on l'a dit précédemment, on suppose que l'univers Ω est fini.

• Une variable aléatoire n'est pas un nombre, mais une fonction.
Les valeurs d'une variable aléatoire sont toujours des nombres.

Exercice ❶
On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si on obtient un numéro entre 1 et 4 on gagne un nombre d'euros correspondant au numéro sorti : si on obtient les numéros 5 ou 6, on perd deux euros.
1) Déterminer la variable aléatoire G qui modélise cette expérience aléatoire.
2) Donner alors l'ensemble de définition de G et les valeurs prises par G.
3) Déterminer pour chaque valeur a prise par G, la probabilité de l'événement $\{G = a\}$.

2) Loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète

On considère la variable aléatoire X définie dans l'exemple précédent.

Chaque issue du lancer de dé est équiprobable, de probabilité $\frac{1}{6}$.

La probabilité que la variable aléatoire X prenne la valeur 1 est donc $\ldots\ldots + \ldots\ldots + \ldots\ldots = \ldots\ldots$.

On écrit $p(X = 1) = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$. De même, on obtient : $p(X = 3) = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$ et $p(X = -2) = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.
On présente souvent la loi de probabilité de la variable aléatoire X sous la forme d'un tableau

x_i	-2	1	3
$p(X = x_i)$	……	……	……

Définition 2. ***Loi de probabilité d'une variable aléatoire***

Définir la loi de probabilité d'une expérience aléatoire, c'est :
• faire une partition de l'univers Ω avec les évènements constitué par les différentes issues possibles de l'expérience : $x_1, x_2, \ldots, x_n$,
• déterminer les probabilités de chacun de ces évènements : $p_1, p_2, \ldots, p_n$,
• consigner ces résultats dans un tableau tel que celui-ci :

x_i	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Remarque : On obtient : $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Exercice ❷

Soit l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. » On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.
Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Espérance, variance et écart-type d'une loi de probabilité

Dans tout ce paragraphe, on considère une variable aléatoire discrète X définie sur un univers Ω et dont la loi de probabilité est donnée par :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Définition 3. *Espérance mathématique, variance et écart-type*

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i .$$

La variance de la variable aléatoire X est le nombre :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 \text{ ou } V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - \left(E(X)\right)^2$$

L'écart type est la racine carrée de la variance :

$$\sigma_X = \sqrt{V(X)} .$$

Exemple : Reprenons l'exemple du paragraphe précédent.

$$E(X) = \frac{1}{3} \times (-2) + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{6} \times 3 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

L'espérance peut s'interpréter en disant que, si l'on joue « un très grand nombre de fois », le gain moyen que l'on peut « espérer » est de $\frac{1}{3}$ €, c'est-à-dire environ 0,33 €.

Lorsque $E(X) = 0$, le jeu est dit **équitable**. Ici, $E(X) > 0$ donc le jeu est favorable au joueur.

$$V(X) = \frac{1}{3} \times (-2)^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{6} \times 3^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} + \frac{9}{6} - \frac{1}{9} = \frac{4}{3} + 2 - \frac{1}{9} = \frac{29}{9}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{29}{9}} = \frac{\sqrt{29}}{3} \approx 1{,}80$$

Comme l'espérance est égale à $\frac{1}{3}$ € et que l'écart-type est d'environ 1,80 €, le risque d'obtenir un gain négatif (c'est-à-dire une perte) est important.

<u>Remarques</u> : • L'espérance est la moyenne de la série des x_i pondérés par les probabilités $p(X=x_i)=p_i$. En effet :

$$E(X)=p_1\times x_1+p_2\times x_2+...+p_n\times x_n=\frac{p_1\times x_1+p_2\times x_2+...+p_n\times x_n}{1}=\frac{p_1\times x_1+p_2\times x_2+...+p_n\times x_n}{p_1+p_2+...+p_n}$$

En répétant un grand nombre de fois l'expérience, la loi des grands nombres nous permet d'affirmer que les fréquences se rapprochent des probabilités théoriques.
La moyenne des résultats se rapprochent donc de l'espérance de la loi de probabilité.
L'espérance est donc la moyenne que l'on peut espérer si l'on répète l'expérience un grand nombre de fois.

• La variance (respectivement l'écart-type) est la variance (respectivement l'écart-type) de la série des x_i pondérés par les probabilités p_i.
L'écart-type est donc une caractéristique de dispersion "espérée" pour la loi de probabilité de la variable aléatoire.

Exercice ❸

Soit l'expérience aléatoire : « On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. » On considère le jeu suivant :

- Si on tire un cœur, on gagne 2 €.
- Si on tire un roi, on gagne 5 €.
- Si on tire une autre carte, on perd 1 €.

On appelle X la variable aléatoire qui à une carte tirée associe un gain ou une perte.
Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de X.

corrigés en vidéo : espérance, variance et écart-type

Propriété.

Soit une variable aléatoire X définie sur un univers Ω.
Soit a et b deux nombres réels.
On a : $E(aX+b)=a\ E(X)+b$ et $V(aX+b)=a^2\ V(X)$

<u>Démonstrations</u> : $E(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}p_i(ax_i+b)=a\sum_{i=1}^{n}p_ix_i+b\sum_{i=1}^{n}p_i=a\times E(X)+b$

$$V(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(ax_i+b-E(aX+b)\right)^2=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(ax_i+b-aE(X)-b\right)^2=\sum_{i=1}^{n}p_i\left(ax_i-aE(X)\right)^2$$

$$V(aX+b)=\sum_{i=1}^{n}a^2p_i\left(x_i^2-2x_iE(X)+E(X)^2\right)=a^2\left[\sum_{i=1}^{n}p_ix_i^2-2E(X)\sum_{i=1}^{n}p_ix_i+E(X)^2\sum_{i=1}^{n}p_i\right]$$

$$V(aX+b)=a^2\left[V(X)+E(X)^2-2E(X)E(X)+E(X)^2\right]=a^2\ V(X)$$

Exercice ❹

Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	-1	2	3	5
$p(X=x_i)$	0,4	0,1	0,2	0,3

1) Calculer l'espérance de X, sa variance et son écart-type.
2) Soit $Z = 2X$. Calculer l'espérance de Z, sa variance et son écart-type.

Exercice ❺

Une entreprise qui fabrique des roulements à bille fait une étude sur une gamme de billes produites. Le diamètre théorique doit être égal à 1,3 cm mais cette mesure peut être légèrement erronée.
L'expérience consiste à tirer au hasard une bille d'un lot de la production et à mesurer son diamètre.
On considère la variable aléatoire X qui, à une bille choisie au hasard, associe son diamètre.
La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	1,298	1,299	1,3	1,301	1,302
$p(X = x_i)$	0,2	0,1	0,2	0,4	0,1

Calculer l'espérance et l'écart-type de la loi de probabilité de X.

corrigé en vidéo

Exercice ❻

Une salle de sport propose trois salles d'entraînement : la salle FIT, la salle STRONG et la salle ZEN. On ne peut s'inscrire que dans une seule des salles, mais on peut disposer en plus de séances de coaching personnalisé.
Parmi les 500 adhérents, 225 sont inscrits à la salle FIT, 60 à la salle ZEN et les autres à la salle STRONG.
Parmi les utilisateurs de la salle FIT, 9 sont inscrits au coaching, comme 43 des utilisateurs de la salle STRONG et 48 de la salle ZEN.
On appelle X la variable aléatoire donnant le coût mensuel, en euro, de l'abonnement d'un adhérent choisi au hasard dans la salle de sport.
1) Établir un tableau des effectifs décrivant la répartition des abonnés.
2) Déterminer la loi de probabilité de X .
3) Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4) La salle propose une réduction de 10 % des tarifs à l'achat d'une carte de fidélité de 24 € par an. En moyenne, cette promotion est-elle avantageuse pour un abonné ?