SECOND DEGRÉ	
Cours	***Première Spécialité maths***

Objectifs :

• Étudier le signe d'une fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée.
• Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
• Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
• Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation).

1. Trinôme du second degré

1) Définition

Définition 1 : On appelle fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré) toute fonction définie sur **R**, qui peut s'écrire sous la forme : $x \mapsto ax^2+bx+c$, où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

Exemples :
• Les fonctions suivantes, définies sur **R**, sont des trinômes du second degré :
$x \mapsto -2x^2+x-1$ et $x \mapsto (x+1)^3-(x-1)^3$ (car, pour tout réel x, $(x+1)^3-(x-1)^3 =$.............

• La fonction $x \mapsto (x+1)^2-(x-1)^2$ n'est pas un trinôme du second degré car pour tout réel x
$(x+1)^2-(x-1)^2 =$............ .

2) Forme canonique

Soit f : $x \mapsto ax^2+bx+c$ ($a \neq 0$) un trinôme du second degré.

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x : $ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.

Or $x^2+\frac{b}{a}x$ est le début du développement de $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$.

Donc, pour tout réel x, $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$.

Posons $\Delta = b^2-4ac$; on l'appellera discriminant du trinôme ax^2+bx+c.

On obtient ainsi, $ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$.

C. Lainé

Définition 2 : Le polynôme du second degré ax^2+bx+c peut s'écrire $ax^2+bx+c=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$. Cette forme est appelée **forme canonique** du polynôme ax^2+bx+c.
Le nombre $\Delta=b^2-4ac$ **est le discriminant** du polynôme ax^2+bx+c ou de l'équation $ax^2+bx+c=0$.

Exemples :
- $2x^2-x+3$ a pour discriminant : $\Delta=$.......................................
- $-x^2+5x+6$ a pour discriminant : $\Delta=$.......................................
- x^2-2x+1 a pour discriminant : $\Delta=$.......................................

2. Résolution d'une équation du second degré

Résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$ revient à résoudre l'équation $a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)=0$ d'après ce qui précède.

Comme $a\neq 0$, on en déduit que $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}=0$, c'est-à-dire $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=$........ .

On en vient à étudier 3 cas :

- Si $\Delta<0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ......0 ; ....

D'où l'équation $ax^2+bx+c=0$ .... dans **R**.

- Si $\Delta=0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ ......0 ; ce qui entraîne que $x+\frac{b}{2a}$......0, c'est-à-dire $x=$.......... .

D'où l'équation $ax^2+bx+c=0$ .... dans **R**.

- Si $\Delta>0$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=$........ équivaut à $x+\frac{b}{2a}=$...... ou $x+\frac{b}{2a}=$...... .

D'où l'équation $ax^2+bx+c=0$ .... dans **R**.

Propriété 1 : Soit $\Delta=b^2-4ac$

Si $\Delta<0$	l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'admet pas de solution dans **R**.
Si $\Delta=0$	l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet une seule solution $x_0=-\frac{b}{2a}$ dans **R**.
Si $\Delta>0$	l'équation $ax^2+bx+c=0$ admet deux solutions $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ dans **R**.

démonstration en vidéo

Exemples : Résoudre dans **R** les équations ci-dessous :

$2x^2 - x - 6 = 0$ (a = 2, b = – 1, c = – 6)	$2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ (a = 2, b = – 3, c = 9 / 8)	$x^2 + 3x + 10 = 0$ (a = 1, b = 3, c = 10)
$\Delta =$ .... Δ … , donc l'équation admet …………………. dans **R** :	$\Delta =$ .... Δ … , donc l'équation admet ………………………… dans **R** :	$\Delta =$ .... Δ … , donc l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$ …………… …………………… dans **R**
corrigé en vidéo	corrigé en vidéo	corrigé en vidéo

Remarques : • Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant ; par exemple, $4x^2 - 9 = 0$, $x^2 - 2x = 0$

• Lorsque a et c sont de signes contraires $-4ac < 0$, alors Δ > 0 et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solution distinctes .

Propriété 2 (admise) : Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2 , alors : $S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$.

Méthode pour résoudre une équation du second degré lorsqu'on connaît déjà une racine

Soit l'équation $2x^2 - 5x + 3 = 0$; elle possède une racine évidente $x_1 = 1$. L'autre racine peut aisément se déterminer grâce à S ou P : $P = 1 \times x_2 = \frac{3}{2}$; d'où $x_2 = \frac{3}{2}$.

Il est donc inutile dans ces cas de calculer le discriminant Δ .

3. Factorisation du trinôme $ax^2 + bx + c$

Propriété 3 (admise) : Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Si $\Delta < 0$	Le trinôme n'a pas de racine ; il est inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré.
Si $\Delta = 0$	$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$; $-\frac{b}{2a}$ est appelée racine double du trinôme.
Si $\Delta > 0$	l'équation $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ où $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ sont les racines du trinôme.

Méthode pour factoriser un trinôme du second degré

Factoriser le trinôme $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$.

On calcule Δ : $\Delta =$.....................................

Δ > 0, donc le trinôme $4x^2 + 19x - 5$ admet deux racines : $x_1 = \dfrac{...... - \sqrt{......}}{......} =$ ...... et

$x_2 = \dfrac{...... + \sqrt{......}}{......} =$ ....

Par conséquent, $4x^2 + 19x - 5 = ...(x - ......)(x - ......) = ...(x + ...)(x - ......)$.

4. Signe du trinôme $ax^2 + bx + c$

Propriété 4 (admise) : • Si $\Delta < 0$, alors le trinôme est du signe de a.

• Si $\Delta = 0$, alors le trinôme est du signe de a et s'annule en $-\dfrac{b}{2a}$.

• Si $\Delta > 0$, le trinôme s'annule en deux réels distincts x_1 et x_2. Si $x_1 < x_2$, le tableau de signes du trinôme est :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		signe de a	0	signe opposé de a	0	signe de a	

Méthode pour déterminer le signe d'un trinôme du second degré

Exemple ❶ : *Étudier le signe du trinôme :* $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$.

On calcule Δ : $\Delta =$..................................... .

Δ > 0, donc le trinôme $f(x) = 2x^2 + 2x - 12$ admet deux racines : $x_1 = \dfrac{...... - \sqrt{......}}{......} =$ ...... et

$x_2 = \dfrac{...... + \sqrt{......}}{......} =$ .... De plus, $a =$ .... ; on en déduit donc :

x	$-\infty$		...		...		$+\infty$
$f(x)$		......	0	......	0	......	

[corrigé en vidéo]()

Exemple ❷ : *Étudier le signe du trinôme :* $f(x) = 2x^2 + x + 4$.

On calcule Δ : $\Delta =$..................................... .

Δ < 0, donc le trinôme $f(x) = 2x^2 + x + 4$ n'admet pas de racines

De plus, $a =$ .... ; on en déduit donc :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		......	

[corrigé en vidéo]()