APPROXIMATION D'UNE COURBE INTÉGRALE PAR LA MÉTHODE D'EULER	
Dérivation	***Travaux pratiques***

Soit f la fonction dérivable sur [0 ; 1] telle que $f(0)=0$ et $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Le but de l'exercice est de construire une ligne polygonale qui représente approximativement la courbe de *f*.

1. **Utilisation de l'approximation affine associée à une fonction :**

> ***Rappel du théorème*** : Soit f une fonction définie sur un intervalle $\mathtt{I}$ et a un réel de $\mathtt{I}$.
> Si f est dérivable en a alors il existe une fonction φ telle que pour tout réel *h,* avec $a+h$ appartenant à $\mathtt{I}$, on ait $f(a+h)=f(a)+h\ f'(a)+h\ \varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$.
> L'approximation affine de $f(a+h)$, pour h proche de 0, associée à f est :
> $f(a+h)=f(a)+h\ f'(a)$.

a) Interpréter géométriquement ce théorème.

b) On découpe l'intervalle [0 ; 1] en 2 intervalles égaux ; le pas est de 0,5.

Le but de la question est de compléter le tableau suivant où $f_{app}(x)$, obtenue en utilisant le théorème précédent, fournit une bonne approximation de $f(x)$.

x	$f'(x)$	$f_{app}(x)$
0		
0,1		
0,2		
0,3		
0,4		
0,5		
0,6		
0,7		
0,8		
0,9		
1		

$f_{app}(0)=f(0)=0$,c'est la seule valeur exacte.

À l'aide de la calculatrice, compléter la deuxième colonne du tableau.

On applique le théorème pour *a* = 0 et *h* = 0,5 ; on obtient ainsi $f_{app}(0{,}1)=f(0)+0{,}5\ f'(0)$.

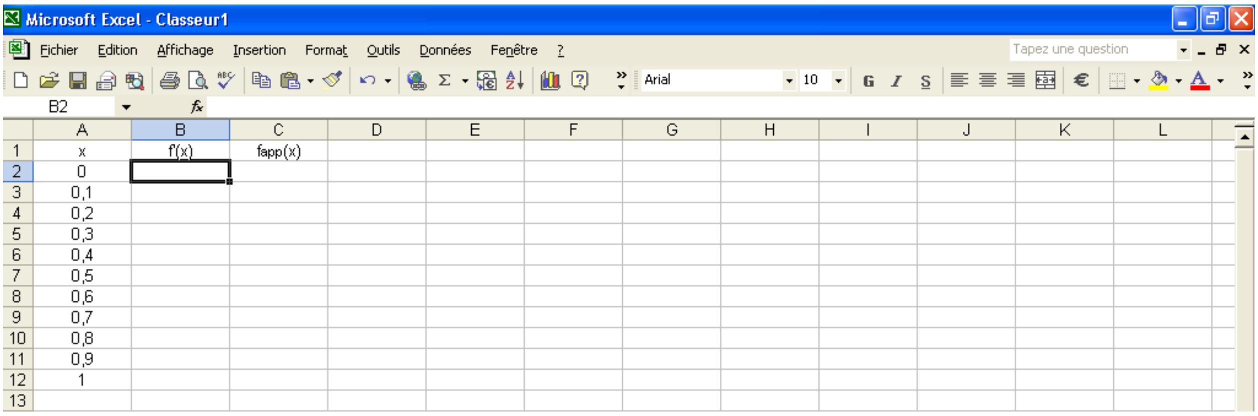
Recommencer pour *a* = 0,1 et *h* = 0,5 ; en déduire $f_{app}(0{,}2)=f_{app}(0{,}1)+0{,}5\ f'(0{,}1)$.

Calculer de même $f_{app}(0{,}3)$, $f_{app}(0{,}4)$, …, $f_{app}(1)$.

c) On découpe maintenant l'intervalle [0 ; 1] en 10 intervalles égaux ; le pas est de 0,1.
Le but de la question est de compléter le tableau suivant où $f_{app}(x)$, obtenue en utilisant le théorème précédent, fournit une bonne approximation de $f(x)$.

x	$f'(x)$	$f_{app}(x)$
0		
0,1		
0,2		
0,3		
0,4		
0,5		
0,6		
0,7		
0,8		
0,9		
1		

Remarques et aides pour compléter le tableau au tableur :
$f_{app}(0) = f(0) = 0$,c'est la seule valeur exacte.
Entrer les données suivantes dans les cellules correspondantes (*x* dans A1…) :



	A	B	C
1	x	f(x)	fapp(x)
2	0		
3	0,1		
4	0,2		
5	0,3		
6	0,4		
7	0,5		
8	0,6		
9	0,7		
10	0,8		
11	0,9		
12	1		
13			

En B2, taper =1/(1+A2*A2), reproduire verticalement.
En C3, taper = C2 + 0,1*B2, reproduire verticalement.

Remarques et aides pour compléter le tableau à la calculatrice (TI) :
On utilise les listes et un petit programme.
Nettoyer les listes : STAT CLRLIST L1, L2, L3.
Rentrer la dérivée : Y = Y1 = 1/(1+x^2). Désactiver l'égalité.
Rentrer les listes : STAT EDIT
En L1 entrer 0 ; 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; ….. ; 1.
Se positionner sur L2= taper « Y1(L1) » (Y1 s'obtient par vars Y-vars).
Pour obtenir L3 il faut entrer le programme suivant :
PRGM NEW choisir un nom ;
: 0 $\rightarrow$ L3(1)
: for (I , 1,10,1)

: L3(I) + 0,1*L2(I) $\to$ L3(I + 1)
: End
Les instructions for et end se trouvent dans PRGM CTL.
Exécuter le programme : PRGM EXEC.
Observer les listes : STAT EDIT.

Remarques et aides pour compléter le tableau à la calculatrice (Casio Algebra FX 2.0) :

- Le choix de la valeur du pas *h*.
- Les valeurs approchées de $f(x)$.
- Le tracé de sa courbe représentative

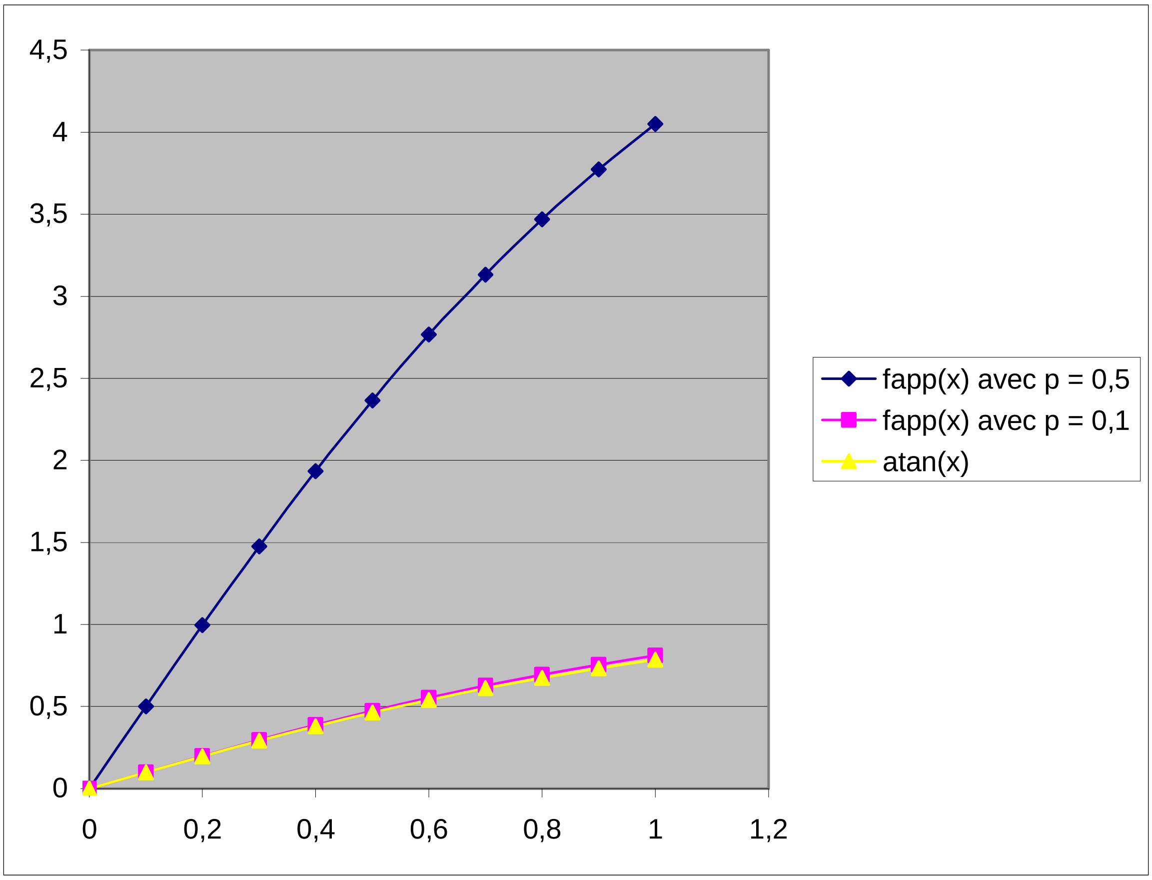
- Allumer la calculatrice et aller dans le menu **GRAPH-TBL**
  - Entrer $1/(1+x^2)$ en Y_1 . *{ Pour ne pas avoir à changer le programme si f' varie}*
- Aller dans le menu **STAT**
  - Appuyer sur F1 **GRPH**, puis sur **2 : Set** **EXE** pour définir les conditions et le tracé d'un graphe statistique :
    - StatGraph1
    - Graph Type : *xy*Line
    - Xlist : List1
    - Ylist : List2
    - Freqquency : 1
    - Mark Type : .
- Aller dans le menu **PRGM**
  - Appuyer sur F2 **NEW** *{ Pour écrire un nouveau programme}*
  - Nommer ce programme « EULER » puis taper le comme suit :

```
ClrText ↲          {pour effacer le texte de l'écran pendant l'exécution du programme}
ClrList ↲          {pour vider les listes}
"X INIT =" ? → X ↲     {Dans notre exemple X = 0}
"X FINAL =" ? → F ↲    {Dans notre exemple F = 1}
"Y INIT =" ? → Y ↲       {Dans notre exemple Y = 0}
"PAS =" ? → H ↲        {Initialisation du pas}
(1/H × (F-X))+1 → P   {P est le nombre de points à tracer}
For 1 → I To P ↲
        X → List 1[I] ↲ {On remplit la ligne I de la liste 1 avec l'abscisse du point
                          d'indice I+1}
        Y → List 2[I] ↲ {On remplit la ligne I de la liste 2 avec l'ordonnée du point
                          d'indice I+1}
        Y+H Y1 → Y ↲     {On calcule l'ordonnée du point d'indice I+1}
        X+H → X ↲       {On calcule l'abscisse du point d'indice I+1}
Next ↲
List 1 ◢
List 2 ◢
DrawStat
```

2. **Représentation graphique approximative de la courbe de *f* :**

Dans un repère orthonormal du plan, construire sur papier millimétré les 11 points de coordonnées $(x, f_{app}(x))$ du b), puis les 11 points de coordonnées $(x, f_{app}(x))$ du c).

Relier par un segment deux points consécutifs.
Vérifier les tracés sur tableur et calculatrice.



3. Une estimation de l'erreur commise :

En réalité la fonction f recherchée est la fonction arctan ou $\tan^{-1}$.
À l'aide de la calculatrice ou du tableur, observer les courbes représentant f_{app} et f, puis ajouter deux colonnes au tableau, l'une donnant les valeurs de $\arctan(x)$ pour x = 0 ; 0,1 ;…..1, l'autre faisant apparaître l'erreur commise quand on remplace $f(x)$ par $f_{app}(x)$ (dans le cas d'un pas égal à 0,1).