DÉRIVATION

Cours	*Première S*

1. Limite d'une fonction finie en zéro

1) Activité

1) À l'aide de votre calculatrice, représenter la courbe de la fonction f définie sur $]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$ *par* $f(x)=\dfrac{4-4(1-x)^2}{x}$.

a) Pourquoi doit-on préciser que x *n'est pas nul ?*

b) Est-ce visible sur l'écran de la calculatrice ?

2) a) À l'aide de la fonction, TRACE de la calculatrice, déplacer le curseur en le maintenant à droite de l'axe des ordonnées de telle manière que son abscisse x, *s'approche de 0.*

L'ordonnée du curseur $f(x_c)$, *notée* y_c *sur l'écran, s'approche alors d'un réel. Quel est ce réel ?*

b) Reprendre la question précédente en maintenant le curseur à gauche de l'axe des ordonnées.

3) Compléter le tableau ci-dessous à l'aide de votre calculatrice.

x	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
$f(x)$						

Les résultats obtenus correspondent-ils avec ceux de la question 2 ?

4) Lorsque, comme ci-dessus, on peut obtenir deux nombres qui coïncident, on appelle ce réel la limite de $f(x)$ *quand* x *tend vers 0, ou encore la limite de* f *en 0 et on le note* $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Pour la fonction f *donnée ci-dessus, compléter :* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$.

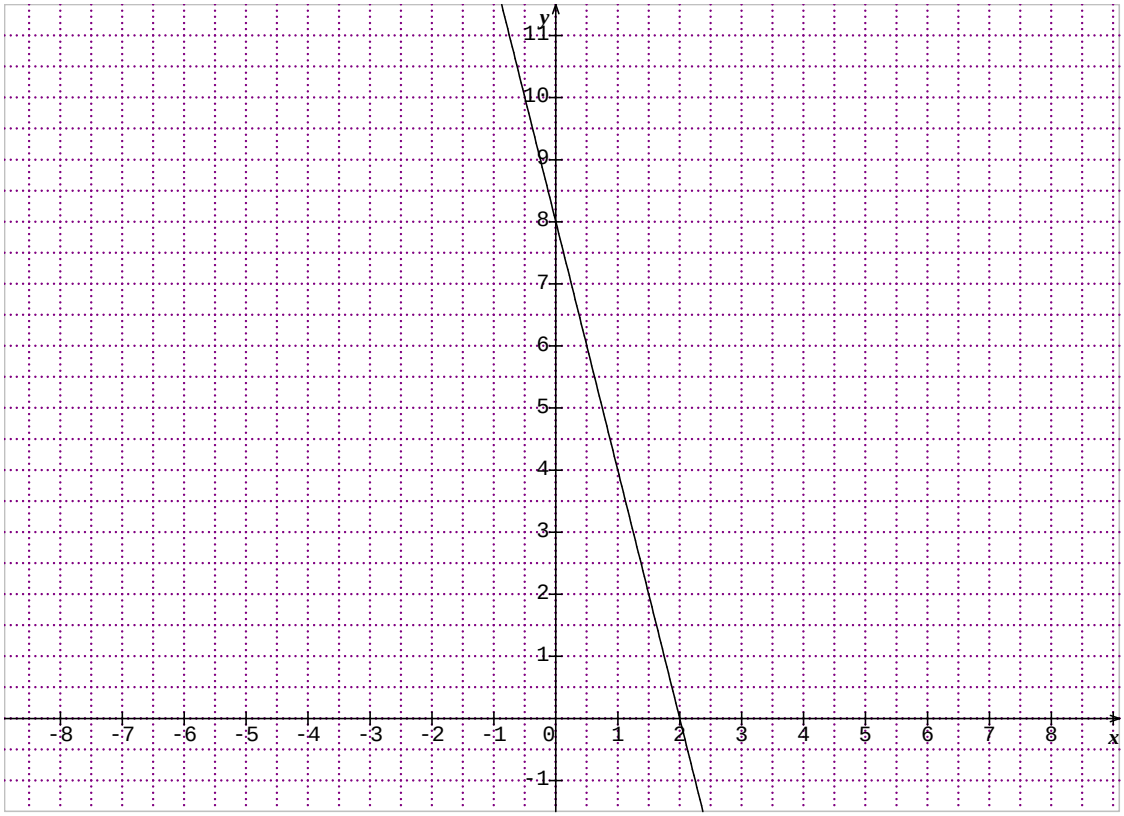
Réponses : 1) a) **On doit préciser que x n'est pas nul car sinon $f(x)$ n'est pas calculable**. $f(0)$ n'existe pas , mais $f(x)$ est calculable pour toute les valeurs de x très voisines de 0.

b) **Non**, car la courbe $(\mathscr{C}_f)$ passe par le point de coordonnées (0 ; 8).

2) a) **L'ordonnée du curseur y_c s'approche du réel 8 lorsque l'abscisse x s'approche de 0 « par la droite »**.

C. Lainé

b) **L'ordonnée du curseur y_c s'approche du réel 8 lorsque l'abscisse x s'approche de 0 « par la gauche »**.



3)

x	-0,001	-0,01	-0,1	0,1	0,01	0,001
$f(x)$	8,004	8,04	8,4	7,6	7,96	7,996

Oui, les résultats obtenus correspondent avec ceux de la question 2.

4) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 8$

Remarque : Le résultat n'est, en fait, pas surprenant ; en effet : pour tout x de $\mathbf{R}^*$, on a :

$$f(x) = \frac{4 - 4 \times (1 - 2x + x^2)}{x} = \frac{-4x^2 + 8x}{x} = -4x + 8 .$$

2) Cas général

Définition 1 : Soit f une fonction telle que 0 soit dans son ensemble de définition D_f ou soit une borne de D_f.

Intuitivement, dire que f a pour limite l en 0, signifie que lorsque x prend des valeurs de plus en plus proche de 0, les nombres $f(x)$ correspondants viennent s'accumuler autour de l.

C'est à dire que pour tout ε $(\varepsilon > 0)$, aussi petit qu'il soit, les nombres $f(x)$ finissent par se situer dans l'intervalle $]l - \varepsilon ; l + \varepsilon[$.

On note : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = l$.

C. Lainé

2. Nombre dérivé et fonction dérivable

Soit f une fonction définie sur un intervalle ou sur une réunion d'intervalles deux à deux disjoints et soit a un élément de D_f.

Définition 2 : Dire que la fonction f est dérivable en a et que le nombre dérivé de f en a est le réel L, revient à dire que le taux de variation de f en a, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, admet pour limite finie L quand h tend vers 0.

Le nombre dérivé est noté $f'(a)$, et on a : $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$.

Exemple : *Soit f la fonction définie sur* **R** *par* $f(x)=\dfrac{1}{4}x^2$.

Montrer que f est dérivable en 2, et déterminer le nombre dérivé de f en 2.

Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\frac{\frac{1}{4}(2+h)^2-1}{h}=\frac{1+h+\frac{1}{4}h^2-1}{h}=\frac{h+\frac{1}{4}h^2}{h}=1+\frac{1}{4}h.$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(1+\dfrac{1}{4}h\right)=1.$

Par conséquent, **f est dérivable en 2 et $f'(2)$ Z 1**.

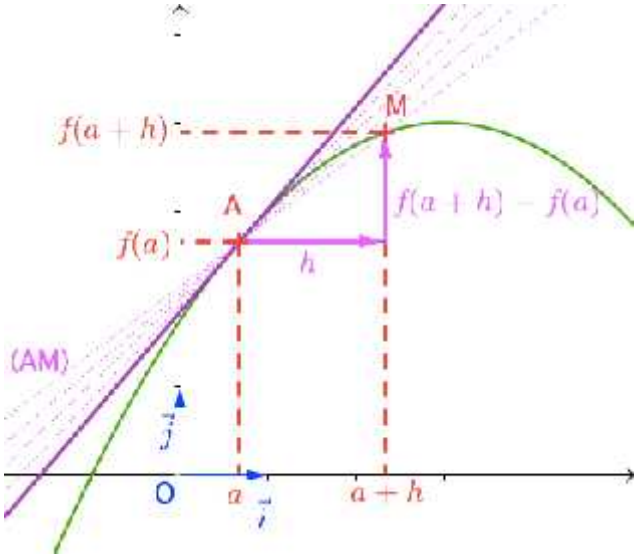
3. Tangente en un point à une courbe

Soit *M* le point de $(\mathscr{C}_f)$ d'abscisse $a+h$.

Le coefficient directeur de la droite (AM) est : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

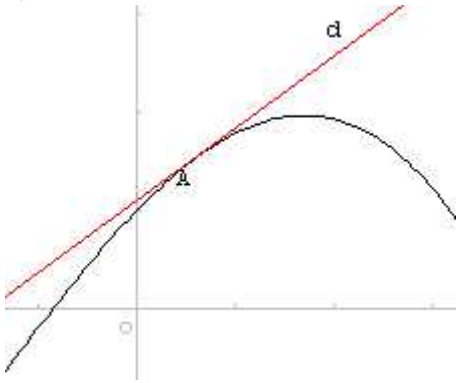
Géométriquement, la tangente à $(\mathscr{C}_f)$ au point *A* se conçoit comme la droite « position limite » des sécantes (AM) lorsque *M* tend vers *A* en restant sur la courbe.

Si f est dérivable en a, la « position limite » de ces sécantes a pour coefficient directeur $f'(a)$, et passe par *A*.



1) Définition

Définition 3 : Soit f une fonction dérivable en a et soit $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f. La tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point $A(a\,;f(a))$ est la droite qui passe par A et qui a pour coefficient directeur $f'(a)$.



2) Équation d'une tangente à $(\mathscr{C}_f)$ en un point

Propriété : Soit f une fonction dérivable en a et soit $(\mathscr{C}_f)$ la représentation graphique de f. La tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ au point $A(a\,;f(a))$ admet pour équation : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

Remarque : (T) admet une équation de la forme $y=f'(a)x+p$; de plus elle passe par $A(a\,;f(a))$.

Exemple : *Soit f la fonction définie sur* **R** *par* $f(x)=\frac{1}{4}x^2$.

Déterminer une équation de la tangente à sa courbe représentative $(\mathscr{C}_f)$ au point d'abscisse 2.

D'après l'exemple du **2.**, $f'(2)=1$. Une équation de la tangente est donc de la forme $y=1\times(x-2)+f(2)$, c'est-à-dire $y=1\times(x-2)+f(2)=x-2+1=x-1$.
On a le résultat suivant : $y=x-1$.

3) Remarque

Si $f'(a)=0$, $(\mathscr{C}_f)$ admet au point d'abscisse *a* une tangente parallèle à l'axe des abscisses (tangente horizontale) d'équation $y=f(a)$.

4. Fonction dérivée

1) Fonction dérivée

Soit f la fonction définie sur **R** *par* $f(x)=x^2$. *La fonction f est-elle dérivable pour tout réel a ?*

Soit a un réel. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{(a+h)^2-a^2}{h}=\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=\frac{2ah+h^2}{h}=2a+h\,.$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}(2a+h)=2a$.

Donc, pour tout réel a, la fonction f est dérivable en a, et $f'(a)=2a$.

On a donc défini sur **R** une fonction, notée f' dont l'expression est $f'(x)=2x$.
Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de *f*.

Définition 1 : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction, qui à tout réel x de I, associe le nombre dérivé $f'(x)$, s'appelle fonction dérivée de *f*. On la note f'.

Remarque : On appelle *ensemble de dérivabilité* de la fonction *f*, l'ensemble sur lequel la fonction dérivée f' est définie.

2) Dérivée des fonctions usuelles

On note $\mathscr{D}_f$ l'ensemble de définition de la fonction f et $\mathscr{D}_{f'}$ l'ensemble de définition de la fonction dérivée de f'.

Fonction *f*	$\mathscr{D}_f$	Fonction f'	$\mathscr{D}_{f'}$
$f(x)=k$ k étant un réel	**R**	$f'(x)=0$	**R**
$f(x)=mx+p$ m et p étant des réels	**R**	$f'(x)=m$	**R**
$f(x)=x^2$	**R**	$f'(x)=2x$	**R**
$f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}^*$	**R**	$f'(x)=nx^{n-1}$	**R**
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbf{R}^*$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbf{R}^*$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0\,;+\infty[$		$]0\,;+\infty[$

Démonstrations :

a) Soit a un réel. Pour h différent de 0, on a : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{k-k}{h}=0$.

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}(0)=0$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a, et $f'(a)=0$.

b) Soit a un réel. Pour h différent de 0, on a : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{m(a+h)-ma}{h}=\dfrac{mh}{h}=m$.

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}(m)=m$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a, et $f'(a)=m$.

c) Déjà démontrée dans le 1).

d) On l'admettra.

e) Soit a un réel différent de 0. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\frac{\frac{a-a-h}{(a+h)a}}{h}=\frac{-h}{h(a+h)a}=-\frac{1}{(a+h)a}.$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{(a+h)a}\right)=-\frac{1}{a^2}$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a non nul, et $f'(a)=-\frac{1}{a^2}$.

f) Soit a un réel strictement positif. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}=\frac{\left(\sqrt{a+h}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\frac{a+h-a}{h\left(\sqrt{a+h}+\sqrt{a}\right)}=\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\ \frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

Donc la fonction f est dérivable en tout réel a strictement positif, et $f'(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}}$.

5. Dérivées et opérations

1) Fonction dérivée

Propriétés : Soit $\mathcal{D}$ un intervalle ou une réunion d'intervalles disjoints.
Soiten u et v deux fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$, et k un réel, alors :

- les fonctions ku, $u+v$ et uv sont dérivables sur $\mathcal{D}$ et :

$(ku)'=ku'$; $(u+v)'=u'+v'$ et $(uv)'=u'v+uv'$.

- si pour tout réel a de $\mathcal{D}$, $v(a)\neq 0$, les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur D et :

$\left(\frac{1}{v}\right)'=-\frac{v'}{v^2}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Démonstrations :

a) Soit a un élément de $\mathcal{D}$. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h}=\frac{ku(a+h)-ku(a)}{h}=k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}.$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h}\right)=\lim_{h\to 0}\left(k\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\right)=k\times\lim_{h\to 0}\left(\frac{u(a+h)-u(a)}{h}\right)=k\times u'(a)$$

Donc la fonction ku est dérivable en tout réel a de $\mathcal{D}$, et $(ku)'(a)=k\times u'(a)$.

b) Soit a un élément de $\mathcal{D}$. Pour h différent de 0, on a :

$$\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}=\frac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h}=\frac{\left(u(a+h)-u(a)\right)-\left(v(a+h)-v(a)\right)}{h}$$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}\right)=\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{u(a+h)-u(a)}{h}-\frac{v(a+h)-v(a)}{h}\right)=u'(a)+v'(a)$.

Donc la fonction $u+v$ est dérivable en tout réel a de $\mathcal{D}$, et $(u+v)'(a)=u'(a)+v'(a)$.

c) Soit a un élément de $\mathcal{D}$. Pour h différent de 0, on a :

$\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}=\dfrac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$. On en déduit alors :

$\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}=\dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h)+\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}\times u(a)$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}\right)=u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$..

Donc la fonction uv est dérivable en tout réel a de $\mathcal{D}$, et $(uv)'(a)=u'(a)\times v(a)+u(a)\times v'(a)$.

d) Soit a un élément de $\mathcal{D}$. Pour h différent de 0, on a :

$\dfrac{\left(\dfrac{1}{v}\right)(a+h)-\left(\dfrac{1}{v}\right)(a)}{h}=\dfrac{\dfrac{1}{v(a+h)}-\dfrac{1}{v(a)}}{h}=\dfrac{v(a)-v(a+h)}{hv(a+h)v(a)}=-\dfrac{1}{v(a+h)v(a)}\times\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$

D'où $\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{\left(\dfrac{1}{v}\right)(a+h)-\left(\dfrac{1}{v}\right)(a)}{h}\right)=-\dfrac{1}{v(a)\times v(a)}\times v'(a)$.

Donc la fonction $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en tout réel a de $\mathcal{D}$, et $\left(\dfrac{1}{v}\right)(a)=-\dfrac{v'(a)}{v^2(a)}$.

e) Soit a un élément de $\mathcal{D}$. Pour h différent de 0, on a : $\dfrac{u}{v}=u\times\dfrac{1}{v}$.

D'où : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=u'\times\dfrac{1}{v}+u\times\left(\dfrac{1}{v}\right)'=u'\times\dfrac{1}{v}+u\times\left(-\dfrac{v'}{v^2}\right)=\dfrac{u'\times v-u\times v'}{v^2}$.

Remarques : • $\left(u^2\right)'=(u\times u)'=u'\times u+u\times u'=2u'u$.

• Toute fonction polynôme est dérivable sur **R**.

• Toute fonction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

3) Exemples

a) Exemple 1

Soit f la fonction définie sur [0 ; +ã[par f(x) = $x\sqrt{x}$. Déterminer la dérivée de la fonction f.

$f=uv$ où $u(x)=x$ et $v(x)=\sqrt{x}$.

$\begin{cases}u \text{ est dérivable sur } [0\,;+\infty[\\ v \text{ est dérivable sur }]0\,;+\infty[\end{cases}$, donc f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Alors $f'=u'v+uv'$ avec $u'(x)=1$ et $v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$,

$f'(x)=1\times\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\sqrt{x}+\dfrac{\sqrt{x}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$.

b) Exemple 2

Soit g la fonction définie sur **R** *par* $g(x) = x^3 + x^2$.

$g = u + v$ où $u(x) = x^3$ et $v(x) = x^2$.
u et v sont dérivables sur **R**, donc g est dérivable sur **R**.
Alors $g' = u' + v'$ où $u'(x) = 3x^2$ et $v(x) = 2x$, et pour tout réel x,
$g'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$.

c) Exemple 3

Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ *par* $h(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

$h = \frac{1}{v}$ où $v(x) = \sqrt{x}$. Comme v est dérivable sur $]0 ; +\infty[$, alors h est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

D'où $h' = -\frac{v'}{v^2}$ avec $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, et pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $h'(x) = -\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = -\frac{1}{2x\sqrt{x}}$.

d) Exemple 4

Soit m la fonction définie sur $I =]-\infty ; -\frac{1}{4}[\cup]-\frac{1}{4} ; +\infty[$ *par* $m(x) = \frac{3x - 2}{4x + 1}$.

$m = \frac{u}{v}$ où $u(x) = 3x - 2$ et $v(x) = 4x + 1$.
m est dérivable sur I, et pour tout réel x de I,
Alors $m' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 3$ et $v'(x) = 4$, et pour tout réel x de I,
$m'(x) = \frac{3(4x+1) - 4(3x-2)}{(4x+1)^2} = \frac{12x + 3 - 12x + 8}{(4x+1)^2} = \frac{11}{(4x+1)^2}$.