TABLEAUX CROISES ET PROBABILITES

Objectifs :

- *Construire un tableau croisé d'effectifs ou un arbre de probabilité associé à un phénomène aléatoire.*
- *Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales à partir d'un tableau croisé d'effectifs.*
- *Interpréter un tableau croisé en utilisant des fréquences conditionnelles.*
- *Calculer des probabilités conditionnelles à l'aide d'un tableau croisé d'effectifs ou d'un arbre pondéré.*
- *Dresser un tableau croisé de deux caractères à partir d'un fichier de données.*
- *Utiliser un tableur pour représenter des données sous forme de tableau ou de diagramme.*

1. Tableaux croisés

Définition 1. ***Tableau croisé***

Soient *A* et *B* deux variables étudiées sur une même population. On peut croiser ces deux variables à l'aide d'un *tableau croisé*. La ligne et la colonne intitulées « Total » sont appelées les marges.

Exemple : Dans une entreprise qui compte 360 employés, on compte 60 % d'hommes et parmi ceux-là, 12,5 % sont des cadres.
Par ailleurs, 87,5 % des femmes de cette entreprise sont ouvrières ou techniciennes.

	Hommes (H)	Femmes (F)	Total
Cadres (C)			
Ouvriers, techniciens (O)			
Total			360

Exercice ❶

Les données ci-dessous sont extraites d'un sondage d'élèves de Première concernant leur temps de trajet en minutes et leur moyen de transport : véhicule personnel (VP), transport en commun (TC), à pied (Pi).

TC	40	Pi	14	Pi	20
VP	27	TC	35	Pi	16
Pi	16	VP	25	TC	11
TC	25	TC	38	VP	6
VP	27	TC	40	TC	13
VP	27	VP	33	VP	11
VP	18	VP	31	VP	7
VP	40	Pi	25	TC	15
TC	22	TC	22	TC	39
VP	26	VP	7	TC	25

Trier les données précédentes dans le tableau croisé ci-dessous :

	VP	TC	Pi	Total
$[0 ; 15[$				
$[15 ; 30[$				
$[30 ; 45[$				
Total				

Exercice ❷

500 spectateurs étaient présents à un match de Quidditch sur gazon opposant les Abraxans de Limoux et les Hippogriffes de Carcassonne. Parmi ces spectateurs :

- 60 % sont venus avec un chapeau de sorcier ;
- 225 sont venus supporter l'équipe de Limoux et, parmi eux, $\frac{2}{3}$ avaient un chapeau de sorcier.

Compléter le tableau suivant :

	Supporters de Carcassonne	Supporters de Limoux	Total
Avec un chapeau de sorcier			
Sans chapeau			
Total			500

Définition 2. ***Fréquence marginale***

On appelle *fréquences marginales* les effectifs des marges divisés par l'effectif total.

Exemple : Dans l'exemple précédent, on a 360 employés en tout et 45 sont des cadres.

La fréquence marginale de cadres est donc égale à ……………..

Remarque : La proportion des cadres qui sont des femmes est égale à $\frac{\cdots\cdots}{360} = \ldots\ldots\ldots$.

On note $f(C \cap F)$ cette fréquence.

Définition 3. ***Fréquence conditionnelle***

On appelle *fréquence conditionnelle de B dans A* le nombre noté $f_B(A)$ défini par :

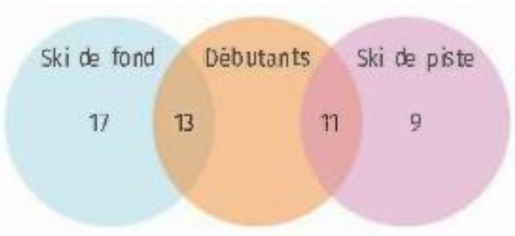
$$f_B(A)=\frac{\text{card}(A\cap B)}{\text{card}(B)}.$$

Exemple : Dans l'exemple précédent, la fréquence conditionnelle de cadres parmi les femmes est égale à : $\dfrac{\text{card}(C\cap F)}{\text{card}(F)}=\dfrac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\dots\dots\dots.$

Remarque : La fréquence conditionnelle se lit **sur une ligne ou une colonne intérieure** du tableau.

Exercice ❸

Un groupe de skieurs est réparti selon leur préférence entre le ski de fond et le ski de piste de la façon ci-contre. Les skieurs qui ne sont pas débutants sont considérés comme étant expérimentés.



1) Construire le tableau croisé d'effectifs correspondant en différenciant les caractéristiques Débutant/ Expérimenté d'une part et Ski de fond/Ski de piste d'autre part.
2) Calculer la fréquence des skieurs préférant le ski de piste.
3) Calculer, parmi les skieurs préférant le ski de piste, la fréquence des skieurs débutants.

Exercice ❹

Le tableau ci-dessous présente les activités préférées d'un groupe de 100 personnes.

	Pétanque	Piscine	Cartes	Total
Femmes	6	16	8	
Hommes	10	2	8	
Total				

1) Compléter ce tableau croisé ci-dessus.
2) Calculer les cinq fréquences marginales, et interpréter les résultats.
3) a) Calculer la fréquence conditionnelle des femmes parmi les joueurs de cartes.
b) Parmi les femmes, quelle est la fréquence des joueuses de pétanque ?

2. Probabilités conditionnelles

Définition 4. *Probabilité conditionnelle*

Pour tous événements *A* et tout événement *B* avec $\text{card}(A) \neq 0$, on appelle probabilité conditionnelle de *B* sachant *A*, note $p_B(A)$, le nombre défini par

$$p_B(A) = \frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(B)}.$$

Exemple : Reprenons l'exemple du 1.
Déterminons la probabilité de rencontrer un cadre sachant c'est un homme.

$$p_H(C) = \frac{\text{card}(C \cap H)}{\text{card}(H)} = \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots .$$

Propriété 1. *Probabilité conditionnelle*

Si $p(B) \neq 0$, $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Exemple : *Lors d'un sondage, 50 % personnes des interrogées déclarent pratiquer un sport régulièrement et 75 % des personnes interrogées déclarent aller au cinéma régulièrement. De plus, 40 % des personnes déclarent faire du sport et aller au cinéma régulièrement. On interroge à nouveau une de ces personnes au hasard et on considère les événements « la personne interrogée pratique un sport régulièrement » et « la personne interrogée va au cinéma régulièrement » que l'on note respectivement S et C. On cherche à calculer la probabilité que la personne pratique un sport régulièrement sachant qu'elle va régulièrement au cinéma.*

On cherche .... ; or $p(C) = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$ et

$p(S \cap C) = \ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots$

D'où $p_C(S) = \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} \approx \ldots\ldots\ldots .$

Par conséquent, la probabilité que la personne pratique un sport régulièrement sachant qu'elle va régulièrement au cinéma est égale à environ …….

Exercice ❺

Dans un aéroport, les portiques de sécurité servent à détecter les objets métalliques que peuvent emporter les voyageurs.
On choisit au hasard un voyageur franchissant un portique. On note :

- *S* l'événement « le voyageur fait sonner le portique » ;
- *M* l'événement « le voyageur porte un objet métallique ».

On considère qu'un voyageur sur 500 porte sur lui un objet métallique et la probabilité que le portique sonne est 0,02192. On admet que :

• Lorsqu'un voyageur franchit le portique avec un objet métallique, la probabilité que le portique sonne est égale à 0,98 ;
• Lorsqu'un voyageur franchit le portique sans objet métallique, la probabilité que le portique ne sonne pas est aussi égale à 0,98.

Traduire les propositions suivantes en utilisant les notations de probabilités, puis calculer ces probabilités :

1) la probabilité qu'un voyageur porte un objet métallique sachant qu'il a fait sonner le portique.
2) la probabilité que le voyageur déclenche la sonnerie sachant qu'il porte un objet métallique.

Exercice ❻

La composition du sang est identique pour tous les humains mais les antigènes présents sur les globules rouges varient d'un individu à l'autre. Il existe quatre groupes sanguins : le groupe A possède uniquement les antigènes A, le groupe B uniquement les B, le groupe AB ales deux types d'antigènes et, enfin, le groupe O se caractérise par l'absence de ces deux types d'antigènes.

	Groupe A	Groupe B	Groupe AB	Groupe O
Globule rouge				
Anti.corps	Anti-B	Anti-A	Aucun	Anti-A et Anti-B
Antigène	Antigène A	Antigène B	Antigènes A et B	Pas d'antigène

On suppose que 44 % des Français sont du groupe sanguin A et que 4 % sont du groupe AB. On choisit un Français au hasard. Si l'antigène A est trouvé dans son sang, quelle est la probabilité que ce Français soit du groupe A ?

3. Evénements indépendants

Définition 5. ***Événements indépendants***

Soient A et B deux événements de probabilité non nulle de Ω.
On dit que A et B sont indépendants lorsque $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$.

Exemple : On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
Soit *R* l'événement « On tire un roi ».
Soit *T* l'événement « On tire un trèfle ».

On a $P(R) = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$.

De plus, $P_T(R)$ est la probabilité de tirer un ……… parmi les …………...

On obtient alors : $P_T(R) = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$

Comme $P_T(R)......P(R)$, alors les événements *R* et *T* ………………… indépendants

corrigé en vidéo

Exercice ❼

On extrait au hasard un jeton d'un sac contenant les six jetons :
- Trois jetons rouges marqués 1, 2, 3 ;
- Deux jetons bleus marqués 1, 2 ;
- Un jeton vert marqué 1.

On considère les événements *R* : « le jeton est rouge », *U* : « le numéro est 1 » et *D* : « le numéro est 2 ».

1) Les événements *R* et *U* sont-ils indépendants ?
2) Les événements *R* et *D* sont-ils indépendants ?

Exercice ❽

Dans une population, un individu est atteint par la maladie a avec une probabilité égale à 0,005 et par la maladie b avec une probabilité égale à 0,01.
On choisit au hasard un individu de cette population.
Soit *A* l'événement « L'individu a la maladie a ».
Soit *B* l'événement « L'individu a la maladie b ».
On suppose que les événements *A* et *B* sont indépendants.

1) Calculer la probabilité qu'un individu soit atteint par les deux maladies.
2) Calculer $P(A \cup B)$. Interpréter le résultat.

corrigé en vidéo

4. Expériences aléatoires à deux épreuves indépendantes

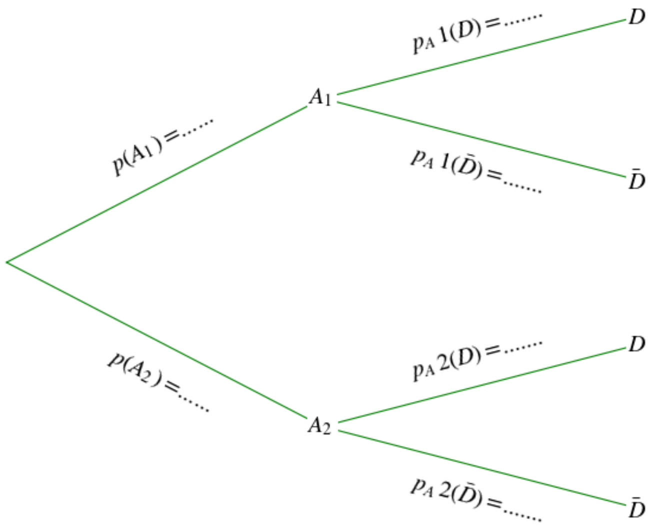
Définition 6. ***Expériences aléatoires indépendantes***

Deux expériences sont dites indépendantes si le résultat de l'une n'influe pas sur le résultat de l'autre.

Deux ateliers produisent des paires de chaussures. Le premier atelier produit 6 000 paires. Le deuxième produit 4 000 paires. 120 paires sont défectueuses et proviennent du premier atelier. Si on ne prélève que des paires venant du deuxième atelier, la probabilité qu'une paire soit défectueuse est égale à 0,3.

On choisit, au hasard, une paire de chaussures. On considère les évènements :
A_1 : « la paire de chaussure provient du premier atelier »
A_2 : « la paire de chaussure provient du deuxième atelier »
D : « la paire de chaussure est défectueuse »

1) Quelle est la probabilité qu'une paire soit défectueuse sachant qu'elle provient du premier atelier ?
2) Compléter l'arbre pondéré suivant :



À partir du nœud "On extrait une paire de chaussure de l'atelier 1", on a : $p_{A_1}(\overline{D}) + ... = ...$

Donc $p_{A_1}(\overline{D}) = ... - ...... = ...$.

Règle 1. ***Arbre pondéré***

Dans un arbre pondéré, la somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à ………...

3) Quelle est la probabilité qu'une paire de chaussures soit défectueuse et provienne du deuxième atelier ?

Règle 2. ***Arbre pondéré***

Dans un arbre pondéré, pour calculer la probabilité d'un chemin, on ………………… les probabilités des branches de ce chemin.

4) Quelle est la probabilité qu'une paire de chaussures soit défectueuse ?

Règle 3 : ***formule des probabilités totales***

La probabilité d'un événement associé à plusieurs chemins est égale à la ………… des probabilités de chacun de ces chemins.

Exercice ❾

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie.

• On estime que 12 % des bovins ont la maladie M.
• Quand un bovin est malade, le test est positif dans 95% des cas.
• 98% des bêtes saines ne réagissent pas au test.

Soit M l'évènement : « l'animal est atteint de la maladie M », et, T l'évènement : « le test est positif ».

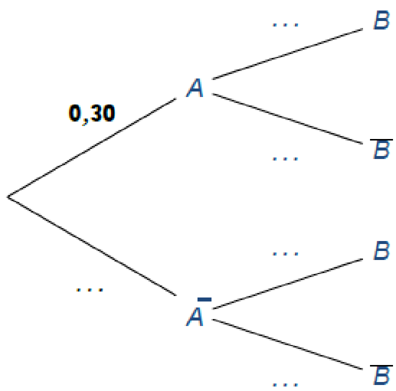
1) Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test ?

2) On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?
3) On veut déterminer la fiabilité de ce test. C'est à dire calculer la probabilité :
   a) pour un animal d'être malade si il réagit au test.
   b) pour un animal d'être sain si il ne réagit pas au test.

Exercice ⑩

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres n'en contiennent pas.
30 % des dragées contiennent une amande ;
40 % des dragées avec amande sont bleues, les autres sont roses ;
75 % des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.
Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte. On admet que toutes les dragées ont la même probabilité d'être choisies.
On note :
• A l'évènement « La dragée choisie contient une amande » ;
• $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement A ;
• B est l'évènement « La dragée choisie est bleue ».

1) Déterminer la probabilité de l'évènement A.
2) Compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



3) Décrire l'évènement $A \cap B$ par une phrase. Montrer que sa probabilité est égale à 0,12.
4) Calculer $P(B)$.
5) Sachant que Sophie choisit une dragée bleue, quelle est la probabilité, que cette dragée contienne une amande ? Arrondir la réponse à 0,01.
6) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice ❶❶

On s'intéresse à la clientèle d'un musée. Chaque visiteur peut acheter son billet sur internet avant sa visite ou l'acheter aux caisses du musée à son arrivée.
Pour l'instant, la location d'un audioguide pour la visite n'est possible qu'aux caisses du musée. Le directeur s'interroge sur la pertinence de proposer la réservation des audioguides sur internet. Une étude est réalisée. Elle révèle que :

• 70 % des clients achètent leur billet sur internet ;
• parmi les clients achetant leur billet sur internet, 35 % choisissent à leur arrivée au musée une visite avec un audioguide ;
• parmi les clients achetant leur billet aux caisses du musée, 55 % choisissent une visite avec un audioguide.

On choisit au hasard un client du musée. On considère les évènements suivants :

• A : « Le client choisit une visite avec un audioguide » ;
• B : « Le client achète son billet sur internet avant sa visite ».

1) Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2) Calculer la probabilité que le client choisisse une visite avec un audioguide.

Exercice ❶❷

Pour 500 individus nés entre 2003 et 2005 dans l'un des cinq départements de l'Ain, l'Ardèche, l'Allier, la Loire et le Rhône, on a relevé l'année et le département de naissance dans une feuille de calcul d'un tableur.

	A	B	C
1		Année de naissance	Département de naissance
2	individu 1	2005	Ardèche
3	individu 2	2003	Allier

1) Quelle formule destinée à être recopiée vers le bas peut-on saisir dans la cellule **D2**, afin d'afficher VRAI si l'individu correspondant à cette ligne est né en 2005 ou s'il est né dans le département de l'Ain, et d'afficher FAUX si cette condition n'est pas remplie ?

2) Quelle formule destinée à être recopiée vers le bas peut-on saisir dans la cellule **E2**, afin d'afficher VRAI si l'individu correspondant à cette ligne est né en 2003 ou s'il est né dans le département du Rhône, et d'afficher FAUX sinon ?

3) Déterminer, à l'aide d'un filtre, la liste des individus remplissant la double condition de la question 2.

Exercice ❶❸

Sur un mois, les six commerciaux d'une entreprise travaillent sur deux zones, notées 1 et 2.

	A	B	C	D	E
1	**Prénom**	**Zone**	**C.A.**	**Prime**	**Surprime**
2	Mat	1	12400		
3	Aymeric	2	15350		
4	Corinne	1	23000		
5	Nadia	1	17600		
6	Léa	2	20200		
7	Julien	1	13200		

La direction accorde une prime de 100 € pour tout commercial travaillant dans la zone 2 ou réalisant au moins 15 000 € de chiffre d'affaire (C.A.).

Une surprime de 200 € est accordée pour un commercial travaillant en zone 2 et réalisant au moins 15 000 € de chiffre d'affaire.

1) On saisit `=SI(OU(C2>=15000;B2=2);100;0)` en **D2**.

   a) Que permet de calculer cette saisie ?

   b) Quels sont alors les résultats obtenus dans chacune des cellules **D2**, **D3**, **D4**, **D5**, **D6** et **D7** ?

2) On saisit `=SI(ET(C2>=15000;B2=2);200;0)` en **E2**.

   a) Que permet de calculer cette saisie ?

   b) Quels sont alors les résultats obtenus dans chacune des cellules **E2**, **E3**, **E4**, **E5**, **E6** et **E7** ?