SUITES GÉOMÉTRIQUES

Objectifs :

- *Reconnaître un phénomène discret de croissance exponentielle et savoir le modéliser.*
- *Calculer un terme de rang donné d'une suite géométrique définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.*
- *Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite géométrique.*
- *Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance exponentielle par le calcul, à l'aide d'une représentation graphique ou en utilisant un outil numérique.*

Définition 1. ***Suite géométrique***

Soit q un nombre réel. On appelle suite géométrique de raison q toute suite définie pour tout entier naturel n par la relation : $u_{n+1} = u_n$.............

Le nombre q est appelé raison de la suite (u_n).

Méthode pour reconnaître une suite géométrique

méthode en vidéo

Exemple : La suite (u_n) définie par pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n$ est une suite géométrique de raison 2.

Exercice ❶

On place un capital de 500 € sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4 % par an. On note C_n la valeur du capital après n années. On note $C_0 = 500$. Déterminer l'expression de C_{n+1} en fonction de C_n.

Propriété 1. ***Suite géométrique***

Une suite (u_n) est géométrique si, et seulement si, pour tout entier n, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est …………………... Cette …………………... est alors la raison de la suite.

Exercice ❷

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3 \times 5^n$.

Montrer que la suite (u_n) est géométrique.

corrigé en vidéo

Exercice ❸

On reprend la suite utilisée dans l'exercice 1. Montrer que la suite (C_n) est géométrique.

Propriété 2. ***Variations d'une suite géométrique***

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme et de raison q strictement positifs.

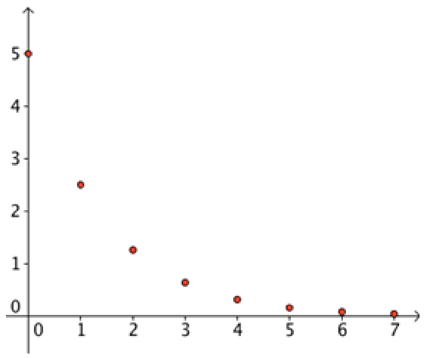
- **Si $q > 1$, alors (u_n) est ……………………..**
- **Si $q < 1$, alors (u_n) est ……………………..**

Méthode pour déterminer les variations d'une suite géométrique

méthode en vidéo

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n par $u_n = 5 \times (0{,}5)^n$ est

……………………… car la raison est égale à 0,5 et $0{,}5$......1.



On parle de « croissance exponentielle »

Exercice ❹

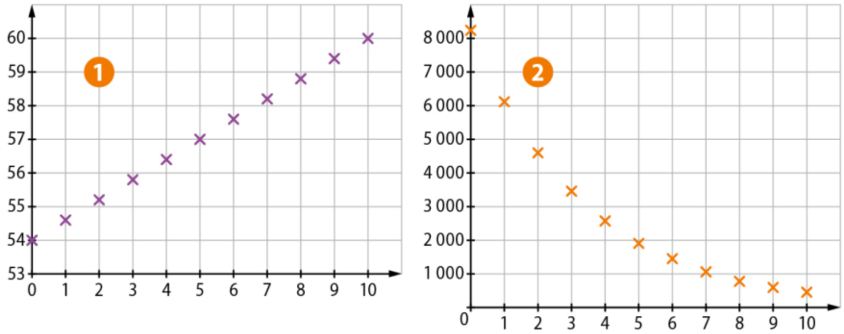
On reprend la suite utilisée dans l'exercice 1. Déterminer les variations de la suite (C_n).

Méthode pour reconnaître graphiquement une suite géométrique

méthode en vidéo

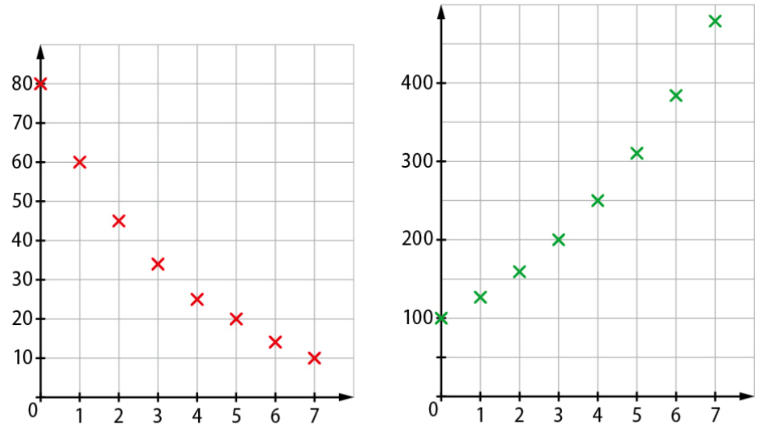
Exercice ❺

Parmi les graphiques suivants, quels sont ceux qui peuvent représenter une suite géométrique ?



Exercice ❻

On donne ci-dessous la représentation graphique de deux suites géométriques.
Préciser la raison et le premier terme de chacune de ces suites.



Graphique 1 **Graphique 2**

Propriété 3. ***Terme général d'une suite arithmétique***

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q, alors :

- **si le premier terme est u_0, pour tout entier n, $u_n =$ ....**
- **si le premier terme est u_1, pour tout entier n, $u_n =$ ....**

Exercice ❼

On reprend la suite utilisée dans l'exercice 1. Exprimer C_n en fonction de n.

Exercice ❽

Le tableau ci-dessous donne les dépenses de soins hospitaliers pour les années 2008 à 2010 en milliards d'euros en France.

Années	2008	2009	2010
Dépenses de soins hospitaliers en milliards d'euros	76,2	79,1	81,2

Source : DREES, comptes de la santé

1) Calculer le pourcentage d'évolution des dépenses de soins hospitaliers entre 2008 et 2009.

2) Les prévisions de dépenses font apparaître une augmentation annuelle de 2 % des dépenses de soins hospitaliers à partir de l'année 2010.
On note, pour tout entier naturel n, u_n le montant des dépenses de soins hospitaliers en milliards d'euros pour l'année $(2010+n)$. On a donc $u_0 = 81{,}2$.

a) Calculer u_1 et u_2. On arrondira les résultats à 10^{-2} près.

b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.

c) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

3) Calculer l'estimation du montant des dépenses de soins hospitaliers pour l'année 2015.
4) On utilise un tableur pour calculer le montant des dépenses de soins hospitaliers.
Une copie d'écran est présentée ci-dessous :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	u_n	81,2										

a) Quatre formules sont proposées à saisir en C2 puis à recopier vers la droite.
Une seule est exacte. Indiquer la réponse choisie.

=B2*1.02^C1 ; =B2*1.02 ; =B2*0.02 ; =B2*1.02

b) Donner une estimation de l'année à partir de laquelle les dépenses de soins hospitaliers dépasseront 100 milliards d'euros.

Exercice ❾

On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 5$ et de raison 2.

1) Ecrire la relation entre u_n et u_{n+1}.
2) On considère l'algorithme ci-dessous :

```
N=0
U=5
while U<100:
    U=2*U
    N=N+1
```

À la fin de l'exécution de cet algorithme, la variable N est égale à 5. Interpréter cette valeur.
3) Modifier l'algorithme pour connaître le rang du premier terme supérieur à 5 000.

Exercice ❿

Au début d'une infection, la concentration de bactéries dans un organisme s'élevait à 1 000 bactéries par mm^3 de sang.
Pour tout entier naturel n, on note b_n le nombre de bactéries n jours après le début de l'infection.
On admet que le traitement antibiotique administré au malade permet de diviser chaque jour le nombre de bactéries par 3.

1) Justifier que (b_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
2) Déterminer le sens de variation de (b_n) ? Justifier.
3) Au bout de combien de temps la concentration de bactéries deviendra-t-elle inférieure à dix bactéries par mm^3 ?
4) Recopier et compléter le programme Python suivant permettant de retrouver le résultat de la question précédente.

```
def seuil() :
  b=1000
  n=0
  while ......:
    b=......
    n=......
  return ......
```

Exercice 11

Une banque propose deux options de placement :
- Placement A : on dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 6 % du capital de départ.
- Placement B : on dépose un capital de départ. Chaque année, la banque nous reverse 4 % du capital de l'année précédente.

On suppose que le placement initial est de 200 €. L'objectif est de savoir à partir de combien d'années un placement est plus intéressant que l'autre.

On note u_n la valeur du capital après n années pour le placement A et v_n la valeur du capital après n années pour le placement B.

1) a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Calculer v_1, v_2 et v_3.

2) Quelle est la nature des suites (u_n) et (v_n) ? On donnera le premier terme et la raison.

3) Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

4) Déterminer le plus petit entier n, tel que $u_n < v_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 12

Un triangle de Sierpinski se dessine en commençant par tracer un triangle équilatéral dont l'aire vaut 1.

A la premiere étape, on marque le milieu de chacun de ses côtés et on enlève le triangle au centre. Puis on répète l'opération avec les trois triangles restants et ainsi de suite.

(les différentes étapes à l'aide de GeoGebra)

étape 0 étape 1 étape 2 étape 3 étape 4

1) Quelle est l'aire de la partie colorée à l'étape 0 ? à l'étape 1 ? à l'étape 2 ?

2) Par quelle opération passe-t-on de l'aire colorée de l'étape n à l'aire colorée de l'étape $n+1$?

3) On note (a_n) la suite qui modélise l'aire colorée à chaque étape.

Justifier que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

4) Exprimer, pour tout entier naturel n, a_n en fonction de n.

5) En utilisant la calculatrice ou le tableur, déterminer la plus petite valeur de n telle que $a_n < 0{,}1$.