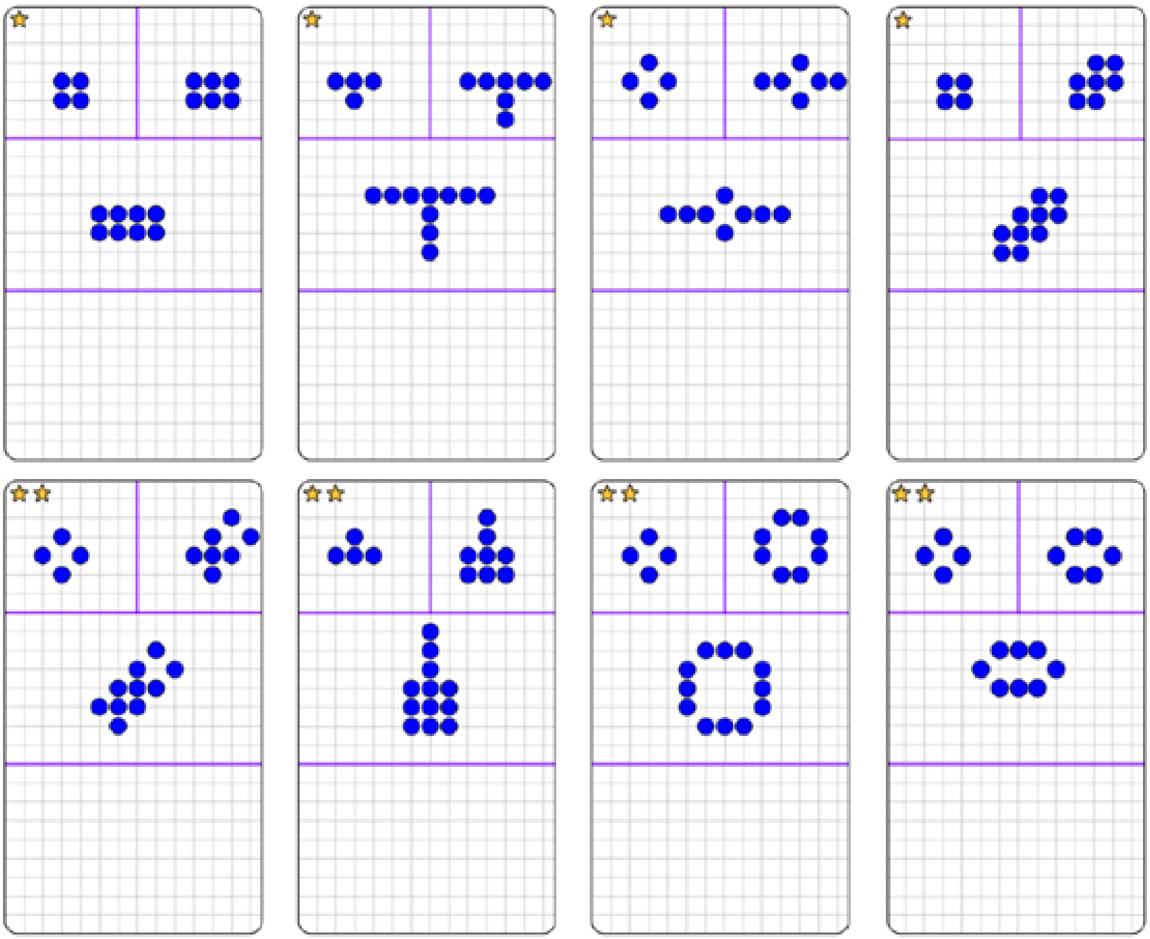
SUITES

Objectifs :

- *Reconnaître un phénomène discret de croissance linéaire et savoir le modéliser.*
- *Calculer un terme de rang donné d'une suite arithmétique définie par une relation fonctionnelle ou une relation de récurrence.*
- *Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une suite arithmétique ou d'une fonction affine.*
- *Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance linéaire.*
- *Démontrer qu'une suite est arithmétique.*
- *Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique à l'aide de la raison.*

1. Activité

Chaque carte présente les trois premiers motifs d'une évolution pour $n=0$, $n=1$ et $n=2$.
On s'intéresse au nombre de points à chaque étape.
Pour chaque carte, le but du jeu est de :
- représenter le motif suivant ;
- déterminer le nombre de points dans le motif à la dixième étape ;
- déterminer le nombre de points dans le motif à étape n.



2. Notion de suite

Définition 1. ***Suites***

On appelle *suite* toute fonction u qui à tout ……………………………….. associe un nombre réel ……….. Il s'agit en fait d'une « liste numérotée » de réels.

Exemple : Soit u la suite définie par $u(n)=2^n$. On a : $u(4)=$..................... .

Définition 2. ***Vocabulaire***

- **L'image de n par la suite u est notée ……… au lieu de $u(n)$.**
- **u_n est appelé ……………………………….. ou terme …………………… de la suite.**
- **u_{n+1} est le terme ………………….. u_n et u_{n-1} est le terme …………………….. u_n .**
- **La suite u est souvent notée (u_n).**

Remarque : • Si u_0 est le premier *terme* de la suite, u_n est le ……………….. terme.

• Si u_1 est le premier *terme* de la suite, u_n est le …………………… terme.

3. Méthodes de construction des suites

1) Définition explicite

Exercice ❶

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=3n^2-1$.

Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_{10} .

$u_0=$............................ ; $u_1=$........................ ; $u_2=$........................ ;

$u_{10}=$............................

Définition 3. ***Définition explicite d'une suite***

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

Méthode pour calculer les termes d'une suite avec une calculatrice TI

tutoriel

2) Définition par récurrence

Exercice ❷

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=4$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=3u_n-1$.

Calculer u_1, u_2 et u_3.

$u_1 =$ .... ; $u_2 =$ .... ; $u_3 =$ ....

Définition 4. *Définition par récurrence d'une suite*

Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir de son ....

Remarque : Le mot récurrence vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

Méthode pour calculer les termes d'une suite avec un algorithme

On considère la suite (u_n) définie par :
$u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0{,}2u_n + 1$.
a) Calculer u_{25}.
b) Calculer les 25 premiers termes.

```
def terme(n):
    u=2
    for i in range(1,n+1):
        u=0.2*u+1
    return(u)
```

tutoriel

Méthode pour calculer les termes d'une suite avec une calculatrice TI

tutoriel

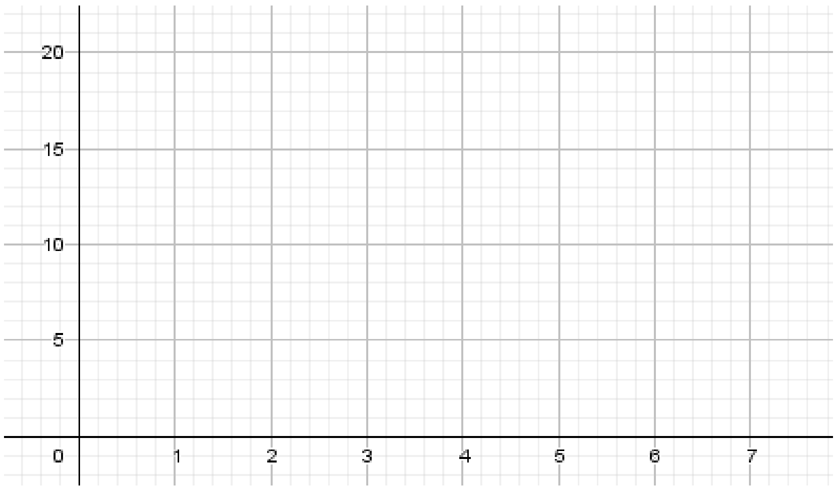
3) Représentation graphique d'une suite

Définition 5. *Représentation graphique d'une suite*

La représentation graphique d'une suite (u_n) dans un repère est l'ensemble des points de coordonnées ....

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 0{,}5n^2 - 3$.
On calcule les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
u_n								



[tutoriel](#) en vidéo

4. Variations d'une suite

Définition 6. *Sens de variation d'une suite*

- **Une suite (u_n) est strictement croissante si pour tout entier naturel n, u_{n+1}......u_n.**
- **Une suite (u_n) est strictement décroissante si pour tout entier naturel n, u_{n+1}......u_n.**

Exercice ❸

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = u_n - 1$.
Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice ❹

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 3n - 5$.
Montrer que la suite (u_n) est croissante.

5. Suites arithmétiques

Définition 7. *Suite arithmétique*

Soit r un nombre réel. On appelle suite arithmétique de raison r toute suite définie pour tout entier naturel n par la relation : ....

Le nombre r est appelé raison de la suite (u_n).

Exemple : La suite des nombres entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison ………….

Exercice ❺

Soit (u_n) la suite arithmétique définie par $u(2) = -7$ et, pour tout entier naturel n, par $u(n+1) = u(n) - 5$. Calculer $u(4)$.

Exercice ❻

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 4 telle que $u(3)=7$. Calculer le terme de rang 5.

Propriété 2. ***Suite arithmétique***

Une suite (u_n) est arithmétique si, et seulement si, pour tout entier n, la différence $u_{n+1}-u_n$ est ……………….. Cette …………………. est alors la raison de la suite.

Exercice ❼

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n=3n-5$.
Montrer que la suite (u_n) est arithmétique.

Exercice ❽

La réserve de noisettes d'un écureuil diminue chaque jour de l'hiver. Elle débute à 156 noisettes, puis atteint 122 noisettes au bout d'un mois, 86 au bout de 2 mois. Sur la durée de l'hiver, peut-on modéliser cette situation par une suite arithmétique ? Justifier.

Propriété 2. ***Terme général d'une suite arithmétique***

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors :

- **si le premier terme est u_0, pour tout entier n, $u_n=$ ....**
- **si le premier terme est u_1, pour tout entier n, $u_n=$ ....**

Méthode pour déterminer le terme général d'une suite arithmétique

méthode en vidéo

Exercice ❾

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -2 et de premier terme $u_0=5$. Exprimer u_n en fonction de n.

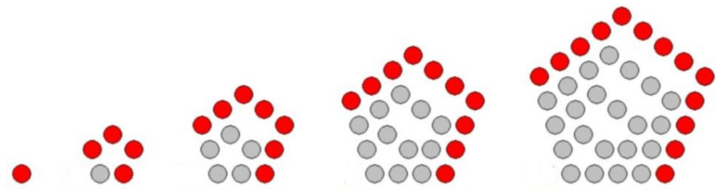
Exercice ❿

Pour chacune des suites arihmétiques définies ci-dessous sur n, calculer $u(10)$:

a) $u(n)=5n-12$; b) $u(n)=\dfrac{2n+9}{7}$.

Exercice 11

On considère cette succession de motifs géométriques constitués uniquement par les points rouges.



étape 0 étape 1 étape 2 étape 3 étape 4

1) Modéliser le nombre de points rouges de cette succession de motifs à l'aide d'une suite que l'on appellera (u_n).

2) Préciser la nature de cette suite et donner ses éléments caractéristiques.

3) En supposant exactes les conjectures précédentes, donner l'expression du terme général de la suite (u_n) en fonction de n.

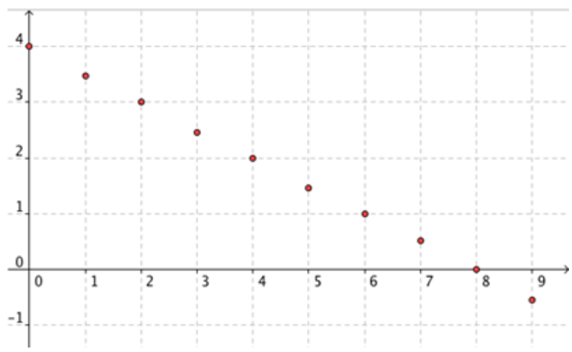
4) Chercher l'étape à partir de laquelle le nombre de points rouges devient supérieur ou égal à 100.

Propriété 3. ***Représentation graphique d'une suite arithmétique***

Une suite (u_n) est arithmétique si et seulement si sa représentation graphique dans un repère du plan est constituée de points ……………………..

Une suite arithmétique représente donc un phénomène discret à croissance linéaire.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = -0{,}5n + 4$.

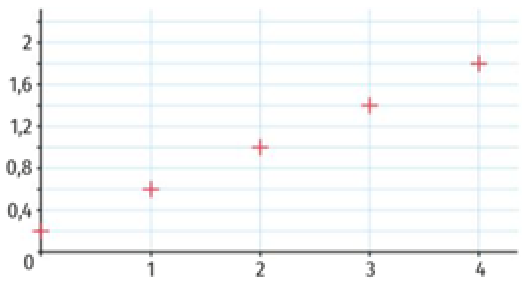


Exercice 12

Soit (u_n) une suite arithmétique dont la représentation graphique est donnée ci-contre.

1) Déterminer le premier terme et la raison de cette suite.

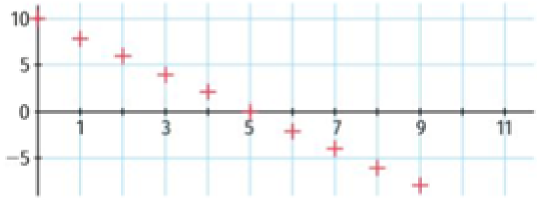
2) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de $u(n)$ en fonction de n.



Exercice 13

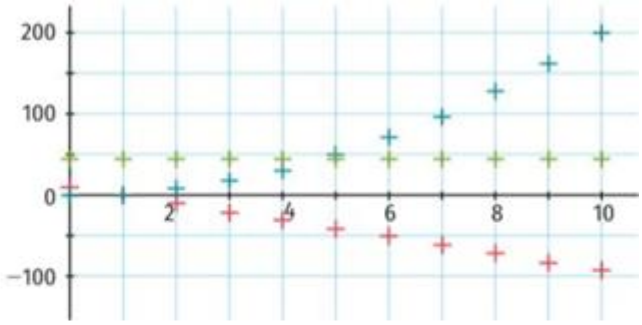
Soit (u_n) une suite arithmétique dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.

Déterminer, pour tout entier naturel n, une expression de $u(n)$ en fonction de n.



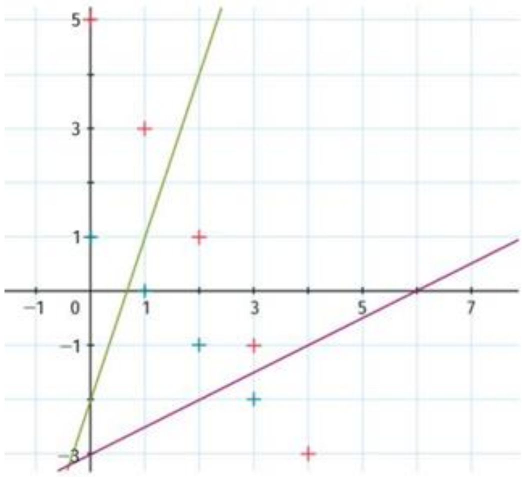
Exercice 14

Parmi les représentations graphiques suivantes, lesquelles représentent des modèles discrets à croissance linéaire ? Justifier.



Exercice 15

Parmi les représentations graphiques suivantes, lesquelles représentent des modèles discrets à croissance linéaire discrets ? Continus ?



Propriété 3. *Variations d'une suite arithmétique*

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

• Si r......0 , alors (u_n) est croissante.

• Si r......0 , alors (u_n) est constante.

• Si r......0 , alors (u_n) est décroissante.

Exemple : La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = -0{,}5n + 4$ est ………………

car ....

Remarque : Les variations de la suite précédente sont les mêmes que celle de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = -0{,}5x + 4$.

Méthode pour déterminer les variations d'une suite arithmétique

méthode en vidéo

Exercice 16

Soit (u_n) la suite arithmétique définie par $u(1)=2$ et, pour tout entier naturel n, par $u(n+1)=4u(n)+2$.

1) Calculer $u(4)$.

2) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

Exercice 17

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population du Cameroun entre 2010 et 2018, en millions d'habitants.

Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Population	20,3	20,9	21,5	22,1	22,7	23,3	23,9	24,6	25,2

1) Représenter le nuage de points associé à ce tableau. On prendra 1 cm pour unité sur chaque axe, les valeurs des ordonnées débutant à 20.
2) Justifier que le modèle de croissance linéaire est adapté pour décrire l'évolution de la population du Cameroun entre 2010 et 2018.
3) Soit n un entier naturel. On note $u(n)$ la population du Cameroun, en millions d'habitants, en l'année $2010+n$, selon ce modèle démographique.
On suppose $u(0)=20{,}3$ et $u(8)=25{,}2$.

a) Calculer la raison de la suite u.

b) Exprimer $u(n)$ en fonction de n.

c) On suppose que ce modèle restera valable dans les 15 années suivantes.
Utiliser ce modèle pour estimer la population du Cameroun en 2030.

Exercice 18

On rappelle que la pression atmosphérique au niveau de la mer est de 1 013,25 hectopascals (hPa).
Pour évaluer la pression atmosphérique, les alpinistes utilisent la règle simplifiée suivante : « la pression atmosphérique diminue de 0,11 hPa quand l'altitude augmente de 1 mètre ».

1) a) De combien d'hectopascals diminue la pression atmosphérique quand l'altitude augmente de 100 mètres ?
b) Compléter le tableau suivant :

Altitude (en m)	0	100	200	500
Pression atmosphérique (en hPa)	1 013,25			

2) Pour tout entier naturel n, on note $p(n)$ la pression atmosphérique en hPa à l'altitude de n mètres, avec cette règle simplifiée.

a) Calculer $p(1)$ et $p(2)$.

b) Justifier que la suite (p_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.

c) Déterminer le terme général de la suite (p_n).

3) Déterminer l'altitude à partir de laquelle la pression atmosphérique est inférieure à 960 hPa.

Exercice 19

Liam décide de faire un placement à intérêts simples afin de prévoir l'achat d'une moto à 13 000 €. Il place 9 500 € en janvier 2022.
A chaque début de mois, son capital est augmenté de 1,1 % du montant initial.
On note $p(n)$ le montant de son placement au bout de n mois après le 1er janvier 2022.
On a donc $p(0) = 9\ 500$.

1) a) Justifier que la suite (p_n) est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison.
   b) Déterminer le terme général de la suite (p_n).

2) a) Déterminer la plus petite valeur de n telle que $p(n) > 13\ 000$.
   b) A partir de quelle date Liam pourra-t-il acheter sa moto ? Justifier.

Exercice 20

Fin 2014, le nombre d'auditeurs d'une radio locale Skymath était de 20 000. Depuis, ce nombre n'a cessé2 d'augmenter régulièrement de 2 500 par an.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'auditeurs à la fin de l'année $(2014 + n)$.
On a alors $u_0 = 20\ 000$.

1) Calculer u_1. Que représente cette valeur ?
2) Ecrire la relation entre u_n et u_{n+1}. En déduire la nature de la suite (u_n).
3) On considère l'algorithme ci-dessous :

```
N=0
U=20000
while U<40000:
    U=U+2500
    N=N+1
```

À la fin de l'exécution de cet algorithme, la variable N est égale à 8.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 21

Dans le jardin de M. Jardimaths, se trouve un puits de 15,7 m de profondeur. Toutes les heures, il creuse 1,2 m. On note $u(n)$ la profondeur du puits au bout de n heures.

1) Justifier que (u_n) est une suite arithmétique dont précisera la raison et le premier terme $u(0)$.
2) Résoudre l'inéquation $u(n) \geq 30$. Interpréter ce résultat.
3) Reproduire et compléter le programme Python ci-dessous afin de retrouver le résultat obtenu dans la question 2).

```
def seuil() :
  u = 15.7
  n = 0
  while ... :
    u = ...
    n = ...
    return(n)
```