

FONCTIONS EXPONENTIELLES

Objectifs :

- Connaître et utiliser le sens de variation des fonctions de la forme $x \mapsto ka^x$ selon le signe de k et les valeurs de a .
- Connaître les propriétés algébriques des fonctions exponentielles et les utiliser pour transformer des écritures numériques ou littérales.
- Calculer le taux d'évolution moyen équivalent à des évolutions successives.
- Reconnaître un phénomène continu de croissance exponentielle et savoir le modéliser.
- Réaliser et exploiter la représentation graphique des termes d'une fonction exponentielle.
- Résoudre un problème de seuil dans le cas d'une croissance exponentielle par le calcul, à l'aide d'une représentation graphique ou en utilisant un outil numérique.

1. Fonction exponentielle de base a

On considère la suite géométrique de raison a définie par $u_n = a^n$.

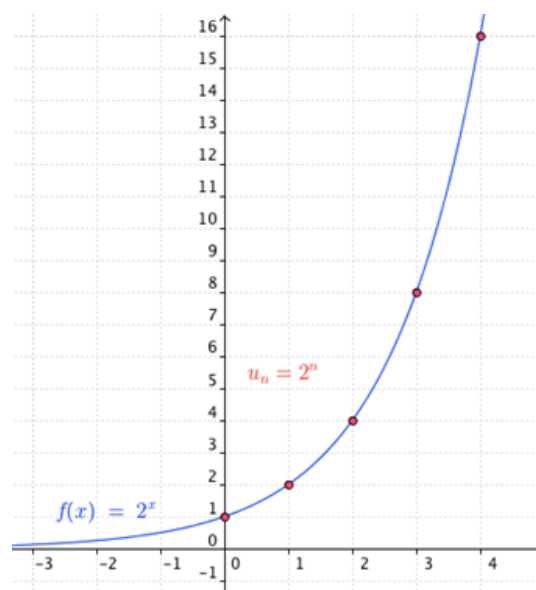
Elle est définie pour tout entier naturel n .

En prolongeant son ensemble de définition pour tout réel positif, on définit la fonction exponentielle de base a . Ainsi par exemple :

- pour une suite, on a $u_4 = \dots$

- pour une fonction, on a $f(4) = \dots$, mais on a aussi $f(3,9) = \dots$

Et de façon générale, on a $f(x) = 2^x$ pour tout réel x positif.



Définition 1. *Fonction exponentielle de base a*

Soit a un réel strictement positif.

La fonction $x \mapsto a^x$ est appelée fonction de base

Propriété 1.

Soit a un réel strictement positif. $a^{-x} = \dots\dots\dots$

L'ensemble de définition des fonctions exponentielles peut ainsi être étendu aux valeurs de x négatives.

Exemple : La fonction exponentielle de base 2 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2^x$.

D'après la représentation graphique précédente, on remarque que la courbe représentant la fonction exponentielle de base 2 est de l'axe des abscisses pour tout réel x .

Par suite, la fonction exponentielle de base 2 est strictement sur $\mathbb{R}$.

Propriété 2. *Signe de la fonction exponentielle de base a*

La fonction exponentielle de base a est strictement sur $\mathbb{R}$.

Propriétés 3.

Soient x et y deux réels, et a un réel strictement positif.

- $a^x \times a^y = \dots\dots\dots$ (relation fonctionnelle)
- $\frac{a^x}{a^y} = \dots\dots\dots$
- Pour tout entier relatif n , $(a^x)^n = \dots\dots\dots$

Exercice ❶

Simplifier les expressions suivantes : $A = 4^{-3} \times 4^{-5}$; $B = \frac{3^3 \times 3^{-2,5}}{9^5}$; $C = (4,8^{-2,1})^3 \times 4,8^{6,2}$.



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ②

Écrire chaque nombre sous la forme 2^x ou 3^x ou 5^x , x étant un nombre réel.

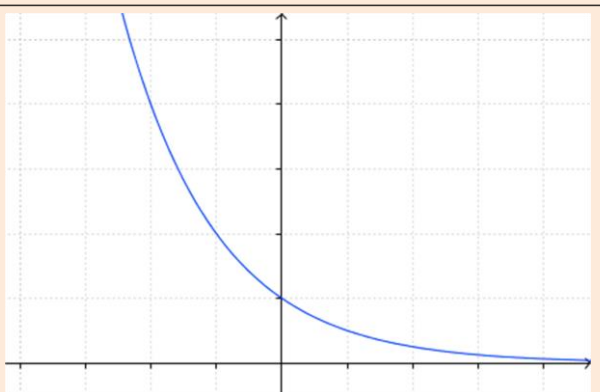
$$A = (5^x)^2 \times 25^2 \quad ; \quad B = \frac{(4^x)^2 \times 2^{1-x}}{2^3} \quad ; \quad C = \frac{(3^x)^3 \times 9^{x+2}}{81}.$$

2. Variations de la fonction exponentielle de base a

Propriété 3. *Variations de la fonction exponentielle de base a*

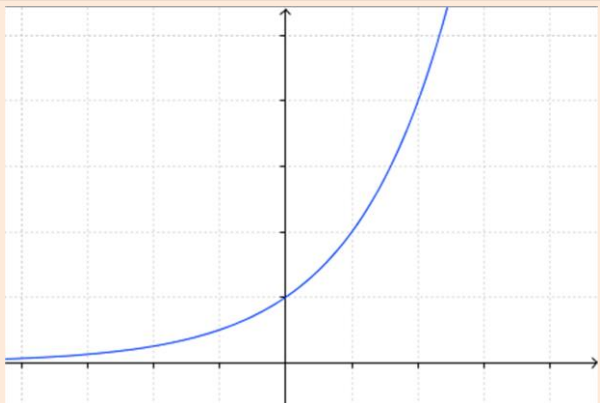
Soit a un réel strictement positif.

• Si, la fonction exponentielle de base a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.



• Si $a = 1$, la fonction exponentielle de base a est sur $\mathbb{R}$.

• Si, la fonction exponentielle de base a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.



Exercice ③

Déterminer le sens de variations de chaque fonction suivante :

a) $f : x \mapsto 3^x$; b) $g : x \mapsto 0,6^x$; c) $h : x \mapsto \frac{3^x}{4^x}$.



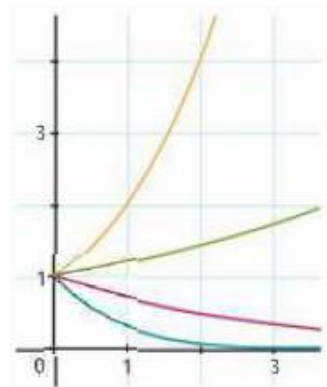
[corrigé en vidéo](#)

Remarque : Quel que soit le réel a strictement positif, la fonction exponentielle de base a passe par le point de coordonnées (..... ;). En effet, $a^0 = \dots\dots$.

Exercice ④

On a représenté sur le graphique ci-contre les fonctions f , g , h et k définies, pour tout réel x positif, par $f(x) = 1,2^x$, $g(x) = 0,7^x$, $h(x) = 0,3^x$ et $k(x) = 2^x$.

Associer en justifiant chacune de ces fonctions à sa représentation graphique.



Exercice ⑤

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par

$$f(x) = 50\,000 \times 1,15^x.$$

- 1) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
- 2) Déterminer les variations de f sur $[0 ; 10]$.
- 3) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a doublé ?



[corrigé en vidéo](#)

Exercice ⑥

Au mois de décembre 2019, le chiffre d'affaires hors taxe d'un magasin spécialisé dans la vente de téléphones portables était de 200 000 €.

Pour l'année 2020, le responsable du magasin prévoit un taux d'augmentation du chiffre d'affaires hors taxe de 8 % par mois.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 12]$ donnant le chiffre d'affaires pour un mois x :

$$f(x) \text{ est de la forme } f(x) = k \times a^x.$$

- 1) Déterminer les valeurs de k et de a .
- 2) En déduire le chiffre d'affaires prévu pour le mois d'août
- 3) Pour quel mois de l'année 2020, le chiffre d'affaires sera presque le double de celui de décembre 2019 ?

3. Taux d'évolution moyen

Propriété 4. Résolution d'une équation de la forme $x^n = a$

Soient a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0 ; +\infty[$, le nombre appelé du nombre a .

Exemple : $x^3 = 27$ équivaut à $x = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

Exercice 7

Entre 2012 et 2015, le prix du gaz a augmenté de 25 %.
Calculer le taux d'évolution moyen annuel.



[corrigé en vidéo](#)

Exercice 8

Tous les ans à partir de fin novembre, des volontaires d'une organisation non gouvernementale de la protection de la nature parcourent les côtes de la Californie pour estimer le nombre de papillons Monarques : il s'agit d'une espèce de papillons qui viennent y passer l'hiver. On dispose des données suivantes :

Année	1997	2000	2006	2012	2019
Nombre de papillons Monarques en milliers	1 300	400	200	90	50

- 1) Calculer le taux d'évolution global du nombre de papillons Monarques entre 1997 et 2019.
- 2) Montrer que le taux d'évolution annuel moyen du nombre de papillons Monarques entre 1997 et 2019 est $-13,8\%$.

Exercice 9

D'après l'INSEE, le nombre de naissances en France métropolitaine est passé de 802 224 en 2010 à 696 800 en 2020, ce qui correspond à une baisse d'environ 13 % en dix ans. Calculer l'évolution annuelle moyenne arrondie à 0,01% du nombre de naissances en France métropolitaine entre 2010 et 2020.

Exercice 10

À la fin du XVIII^e siècle, l'économiste Thomas Malthus fait des prévisions sur l'évolution de la population et l'évolution de la nourriture en Grande-Bretagne. Voici un extrait de son *Essai sur le principe de population* écrit en 1798 :

Comptons pour onze millions la population de la Grande-Bretagne, et supposons que le produit actuel de son sol suffit pour la maintenir.

Au bout de vingt-cinq ans, la population sera de vingt-deux millions ; et la nourriture ayant également doublé, elle suffira encore à l'entretenir.

Après une seconde période de vingt-cinq ans, la population sera portée à quarante-quatre millions : mais les moyens de subsistance ne pourront plus nourrir que trente-trois millions d'habitants.

Dans la période suivante, la population – arrivée à quatre-vingt-huit millions ne trouvera des moyens de subsistance que pour la moitié de ce nombre.

À la fin du premier siècle, la population sera de cent soixante-seize millions, tandis que les moyens de subsistance ne pourront suffire qu'à cinquante-cinq millions seulement. Cent vingt et un millions d'hommes seront ainsi condamnés à mourir de faim.

Source : Bordas

- 1) Lire le texte de Malthus ci-contre, puis recopier et compléter le tableau ci-dessous.

La population est exprimée en millions d'habitants, et la nourriture est exprimée en millions d'habitants qu'elle permet d'alimenter.

Année	1798	1823	1848	...	...
Population	11	22	44		
Nourriture	11	22	33		

- 2) Selon Malthus :
 - a) Comment évolue la population ?
 - b) Comment évolue les ressources ?
- 3) On modélise l'évolution de la population par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = 11 \times 2^x$ où x est le nombre de quarts de siècle écoulés depuis 1798.
 - a) Combien de quarts de siècle se sont écoulés entre 1798 et 2023 ?
 - b) Selon ce modèle, quelle serait la population de la Grande-Bretagne en 2023 ?Commenter.

Exercice 11

Lors d'une épidémie, le taux de reproduction du virus responsable, appelé le R_0 , est une estimation du nombre moyen d'individus qu'une personne contagieuse peut contaminer. Ainsi, une personne malade contamine directement R_0 individus. Puis chacune de ces R_0 personnes contamine à son tour R_0 individus. Donc au deuxième rang de transmission, R_0^2 nouveaux individus sont contaminés indirectement par la première personne, etc ... Lorsque le R_0 est constant, on peut estimer qu'en moyenne une personne malade à l'instant $t = 0$ contamine indirectement $f(t) = R_0^t$ individus à l'instant t exprimé en unité de temps.

- 1) A l'aide de la calculatrice, construire un tableau de valeurs de $f(t)$ pour t variant de 0 à 20 avec un pas de 0,5 dans les cas suivants : $R_0 = 3$; $R_0 = 1,5$; $R_0 = 1$; $R_0 = 0,9$ et $R_0 = 0,5$.
- 2) Pourquoi est-il important que le R_0 soit inférieur à 1 ?