

FONCTIONS DÉRIVÉES ET SENS DE VARIATION

Objectifs :

- Décrire les variations d'un phénomène en mobilisant la dérivée d'une fonction.
- Déterminer le sens de variation d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à trois (la forme factorisée de la dérivée pourra être donnée).
- Prévoir l'évolution d'un phénomène grâce à l'étude de la dérivée d'une fonction.

1. Activité

Doc 1 : 100 m d'Usain Bolt

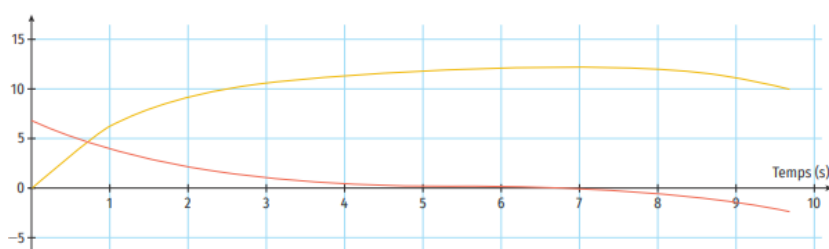
Dans une feuille de calcul, on a recensé les temps intermédiaires d'Usain Bolt au 100 m lors des Jeux olympiques de Pékin de 2008.

Le logiciel utilisé détermine une fonction qui donne la distance parcourue en fonction du temps à partir des données saisies.

La vitesse instantanée est la fonction dérivée de la fonction distance : à chaque instant, elle associe le nombre dérivé de la distance, en m/s.

	A	B	C	D	E
1	Temps cumulé (s)	Distance (m)	Vitesse instantanée (m/s)	Vitesse moyenne dlt (m/s)	Accélération instantanée (m/s ²)
2	0	0	0	0	0
3	1,85	10	8,82	5,41	2,35
4	2,87	20	10,54	9,8	1,14
5	3,78	30	11,28	10,99	0,57
6	4,65	40	11,65	11,49	0,32
7	5,5	50	11,88	11,76	0,23
8	6,32	60	12,04	12,2	0,16
9	7,14	70	12,11	12,2	0
10	7,96	80	11,98	12,2	-0,37
11	9,79	90	11,41	12,05	-1,06
12	9,59	100	9,93	11,11	-2,32

Doc 2



La feuille de calcul du document 1 donne le graphique ci-contre : la courbe en jaune représente la vitesse instantanée, en m/s, et la courbe en rouge la fonction dérivée de la vitesse instantanée qui représente l'accélération instantanée, en m/s².

1) Dans le document 1, on s'intéresse aux temps réalisés par Usain Bolt sur le 100 m en finale des Jeux olympiques de Pékin de 2008.

a) Calculer la vitesse moyenne d'Usain Bolt sur les 10 premiers mètres de la course. Convertir en km/h.

b) Calculer sa vitesse moyenne entre le 10^e et le 20^e mètre de la course.

c) D'après les données du document 1, quelle est sa vitesse maximale ? Au bout de combien de temps l'atteint-il ?

2) Quelle formule a-t-on pu entrer en **D3** pour calculer les vitesses moyennes sur chaque tronçon de 10 m ?

3) Le document 2 permet de comparer les variations de la vitesse instantanée et les valeurs de l'accélération instantanée.

- a) Comment évolue la vitesse d'Usain Bolt lorsque sa dérivée, l'accélération, a des valeurs élevées ?
 - b) Que peut-on dire de la vitesse à partir de 7 s ? Qu'en est-il de l'accélération ?
- 4) a) Comment le signe de l'accélération permet-il de déterminer les variations de la vitesse ?
- b) Quel lien peut-on conjecturer entre les variations d'une fonction et le signe de sa dérivée ?

2. Fonction dérivée

Définition 1. Fonction dérivée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont l'expression algébrique est donnée dans la première colonne du tableau ci-dessous. On appelle fonction dérivée de la fonction f la fonction f' dont l'expression algébrique $f'(x)$ est donnée dans le tableau ci-dessous.

$f(x)$	$f'(x)$	ensemble de définition de f'
constante réelle k		$\mathbb{R}$
x		$\mathbb{R}$
$mx + p$, où m et p sont des réels		$\mathbb{R}$
x^2		$\mathbb{R}$
x^3		$\mathbb{R}$

Propriété 1.

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I .

- $u + v$ est dérivable sur I et : $(u + v)' = \dots\dots\dots$
- pour tout réel k , ku est dérivable sur I et : $(ku)' = \dots\dots\dots$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 7x + 2$.



Méthode : On a $f = u + v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = -7x + 2$.

D'où $f' = u' + v'$ avec $u'(x) = \dots\dots\dots$ et $v'(x) = \dots\dots\dots$. On en déduit que $f'(x) = \dots\dots\dots$

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^3$.



Méthode : On a $f = 7u$ avec $u(x) = x^3$. D'où $f' = 7u'$ avec $u'(x) = \dots\dots\dots$

On en déduit que $f'(x) = \dots\dots\dots$.

Exercice ❶

Dans chaque cas, calculer la fonction dérivée de la fonction f :

- a) $f(x) = 3x$; b) $f(x) = x^2 + 1$; c) $f(x) = 2x^3$;
d) $f(x) = 2x^2 + 5x$; e) $f(x) = 4x^2 - 6x + 1$; f) $f(x) = x^2 - 2x + 6$;
g) $f(x) = -3x^2 + 2x + 8$ h) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 5$ i) $f(x) = -x^3 + x^2 + 1$

Exercice ❷

Soit g la fonction définie sur $[-10 ; 10]$ par $g(x) = 1,2x^2 - 6x - 1$.

La courbe représentative de g admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales sur son ensemble de définition ? Si oui, donner une équation de chacune de ces tangentes.

Exercice ❸

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - 300x + 2$.

La courbe représentative de g admet-elle une ou plusieurs tangentes horizontales sur son ensemble de définition ? Si oui, donner une équation de chacune de ces tangentes.

3. Étude de fonctions

1) Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété 2. Du sens de variation au signe de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- **Si f est croissante sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$;**
- **Si f est décroissante sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$;**
- **Si f est constante sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$.**

Exemple : Soit f une fonction définie sur $[-3 ; 5]$ telle que :

x	-3	-1	0	5
variations de f	4		1	
		↘	↗	↘
			-2	0

On en déduit que la fonction f' a pour signe :

x	-3	-1	0	5	
$f'(x)$	-	0	+	0	-

2) Du signe de la dérivée au sens de variation

Propriété 3. Du signe de la dérivée au sens de variation

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$ sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I ;
- Si pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$ sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I ;
- Si pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

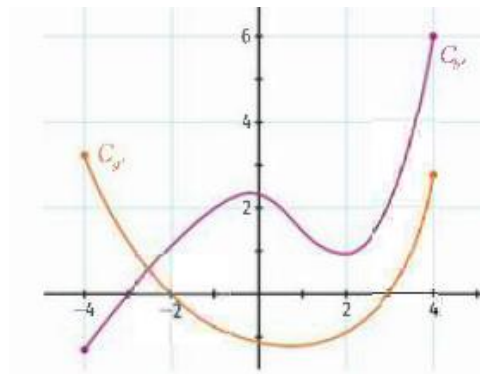
Exemple : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^3 - 11$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x , $f'(x) = \dots\dots\dots$

Donc pour tout réel x , $f'(x) \dots\dots 0$; par conséquent, f est $\dots\dots\dots$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice ④

On considère deux fonctions h et g définies sur $[-4 ; 4]$ dont on donne les représentations graphiques de leur fonction dérivée h' et g' .



- 1) Déterminer graphiquement le signe de h' ainsi que celui de g' sur $[-4 ; 4]$.
- 2) En déduire les variations des fonctions h et g sur $[-4 ; 4]$.

Exercice ⑤

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$.

- 1) Calculer la fonction dérivée de f .
- 2) Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
- 3) Dresser le tableau de variations de f .

Exercice ⑥

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$.

- 1) Calculer la fonction dérivée de f .
- 2) Montrer que $f'(x) = 3(x+4)(x-1)$
- 2) Déterminer le signe de $f'(x)$ en fonction de x .
- 3) Dresser le tableau de variations de f .



[corrigé en vidéo](#)

Exercice 7

Une entreprise commercialise des pneus. La production mensuelle maximale est de 30 000 pneus. On suppose que la totalité de la production mensuelle est vendue chaque mois. Les charges de production, en milliers d'euros, pour x milliers de pneus vendus, sont données par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; 30]$ par $f(x) = 4x^2 + 4x + 574$.

L'entreprise fixe le prix de vente d'un pneu à 130 €. On réalise une feuille de calcul afin de connaître les quantités de pneus à produire et à vendre pour réaliser un bénéfice.

	A	B	C	D
	Nombre de pneus (en milliers)	Charges de production (en milliers d'euros)	Recette (en milliers d'euros)	Bénéfice (en milliers d'euros)
1				
2	0	574	0	-574
3	1	582	130	-452
4	2	598	260	-338
5	3	622	390	-232
6	4	654	520	-134

- 1) Quelles formules peut-on saisir dans les cellules **B2**, **C2** et **D2** afin de compléter cette feuille de calcul jusqu'à la ligne 32 ?
- 2) En utilisant le tableur ou la table de la calculatrice, répondre aux questions suivantes :
 - a) Quelles sont les charges de production pour 12 000 pneus produits ?
 - b) En vendant 4 000 pneus, l'entreprise est-elle bénéficiaire ? Justifier.

Exercice 8

Liam frappe une balle de tennis depuis une hauteur de 2 m pour lui donner une vitesse initiale de 68,6 m/s.

On modélise l'altitude de la balle à l'instant $t \geq 0$ par la fonction A définie par $A(t) = -4,9t^2 + 6,86t + 2$.

- 1) La vitesse de la balle peut être décomposée en deux composantes : une composante horizontale et une composante verticale. Montrer que la vitesse verticale de la balle est nulle au bout de 0,7 s.
- 2) Quelle altitude a-t-elle atteinte à ce moment-là ?



Exercice 9

Tempérer le chocolat consiste à le faire fondre en trois étapes afin de lui donner une forme idéale pour réaliser des enrobages, des bonbons, des moulages, ...

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 12,5]$ par $f(t) = 0,14t^3 - 3,15t^2 + 18,48t + 18$.



[Source](#)

Lorsque t représente le temps (en minutes), on admet que $f(t)$ modélise la température (en degrés Celsius) du chocolat à l'instant t , au cours d'une opération de tempérage.

- 1) Pour tout t de $[0 ; 12,5]$, calculer $f'(t)$ et vérifier que $f'(t) = (0,42t - 1,68)(t - 11)$.
- 2) Construire le tableau de variations de la fonction f sur $[0 ; 12,5]$.
- 3) Selon ce modèle, quelle est la température maximale atteinte lors du tempérage de ce chocolat ?