DERIVATION ET TANGENTES

Objectifs :

• *Interpréter le nombre dérivé dans le cadre d'un modèle d'évolution.*
• *Interpréter géométriquement le nombre dérivé comme coefficient directeur de la tangente.*
• *Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point.*

1. Tangente à une courbe en un point

Activité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

1) A l'aide de GeoGebra, construire la courbe representative $\mathscr{C}_f$ de la fonction *f*.

2) Placer sur $\mathscr{C}_f$, le point *A* d'abscisse 1 et un point *M* quelconque.

3) Tracer la droite (AM) et déplacer le point *M* pour tester différentes positions de cette droite.

4) Que se passe-t-il lorsque les points *A* et *M* sont confondus ?

5) a) A l'aide de l'outil « `Tangentes` » de GeoGebra, tracer la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ passant par le point *A*.
b) Où faut-il placer le point *M* pour que la droite (AM) soit presque confondue avec la tangente à $\mathscr{C}_f$ en *A* ?

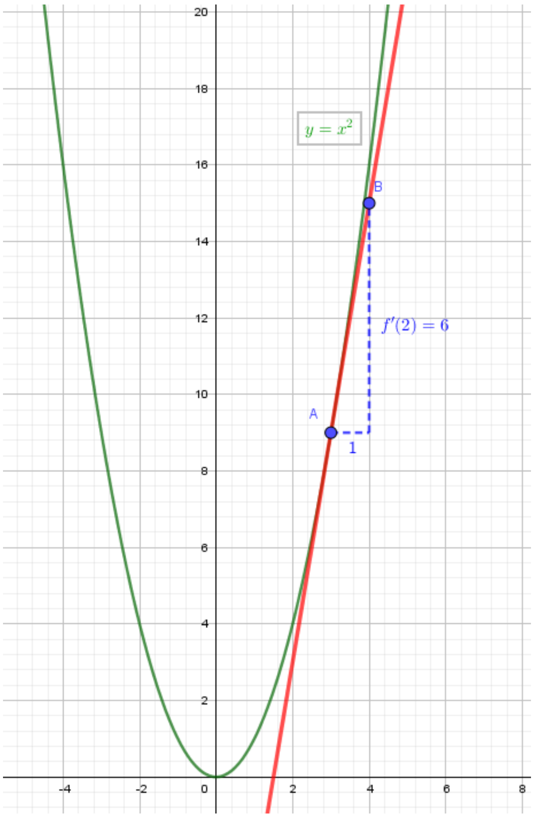
Définition 1. ***Tangente à une courbe en un point***

Soit $A \in \mathscr{C}_f$. On appelle tangente à $\mathscr{C}_f$ en *A*, lorsqu'elle existe, la droite qui passe par *A* et qui est la position limite des sécantes (AM) lorsque le point *M* devient aussi proche que possible du point *A*.

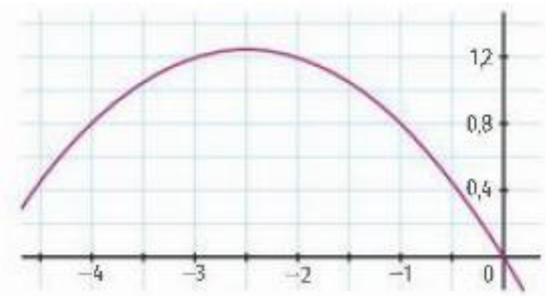
Méthode pour tracer une tangente à une courbe en un point et la tracer

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = x^2. On cherche à tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 dont le coefficient directeur est 6.

On place le point de coordonnées $(3\ ;f(3))$, c'est-à-dire $(3\ ;9)$
On trace la droite passant par ce point et de coefficient directeur $f'(3)=6$.



Exercice ❶
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la représentation graphique est donnée ci-dessous.



1) Tracer la tangente au point d'abscisse -3 sachant que son coefficient directeur vaut 0,2.
2) Tracer la tangente au point d'abscisse -1 sachant que son coefficient directeurvaut $-0,6$.

2. Nombre dérivé

Activité
Reprenons l'activité du **1**.
Quel est le coefficient directeur de la tangente au point *A* ? ……………………………………

Ce coefficient directeur est appelé ……………………………… de f en 1.

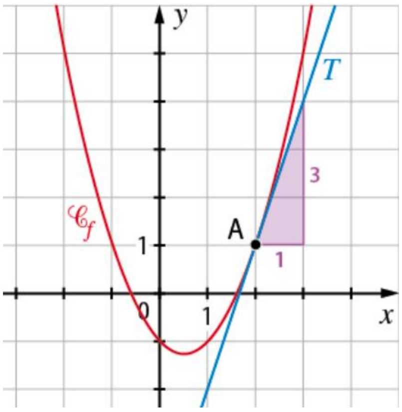
Définition 2. *Nombre dérivé*

Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en *A*, est appelé nombre dérivé de f en x_A. Il se note $f'(x_A)$.
On dit aussi que f est dérivable en x_A.

Exemple : Sur la figure ci-dessous, la droite T est la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point *A*.

L'abscisse de *A* est égale à …… et le coefficient directeur de T est égal à ……

Par conséquent, le nombre dérivé de f en 2 est …… ; on note : $f'(......) = ...$



Remarque : Une voiture est arrêtée à un feu rouge. Lorsque le feu passe au vert, la voiture avance et accélère progressivement. Si la voiture parcourt 100 mètres en 20 secondes, sa vitesse moyenne est $v_m = \frac{d}{t} = \frac{100}{20} = 5$ m/s .

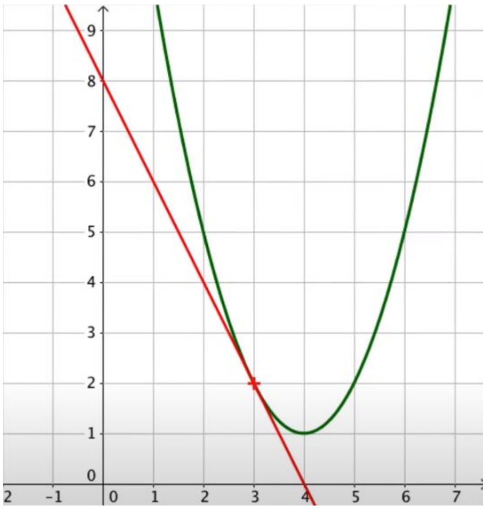
Notons $v(t)$ la vitesse de la voiture à n'importe quel instant t entre 0 s et 20 s.

$v(8)$ donne la vitesse instantanée en m/s. Cette vitesse est indiquée par le compteur de la voiture, en km/h, au bout de 8 secondes.

$v(8)$ donne la variation de la vitesse au bout de 8 secondes. C'est ce qu'on appelle l'accélération instantanée de la voiture. L'accélération représente donc le taux de variation instantanée de la vitesse.

Exercice ❷

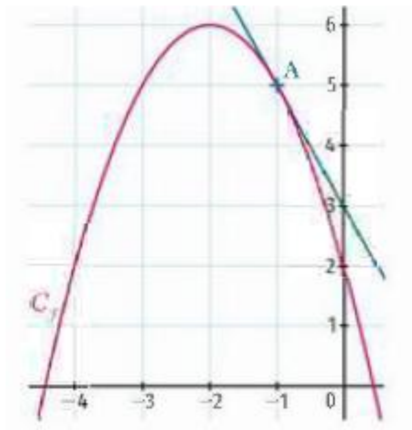
Déterminer graphiquement le nombre dérivé de la fonction en $x = 3$.



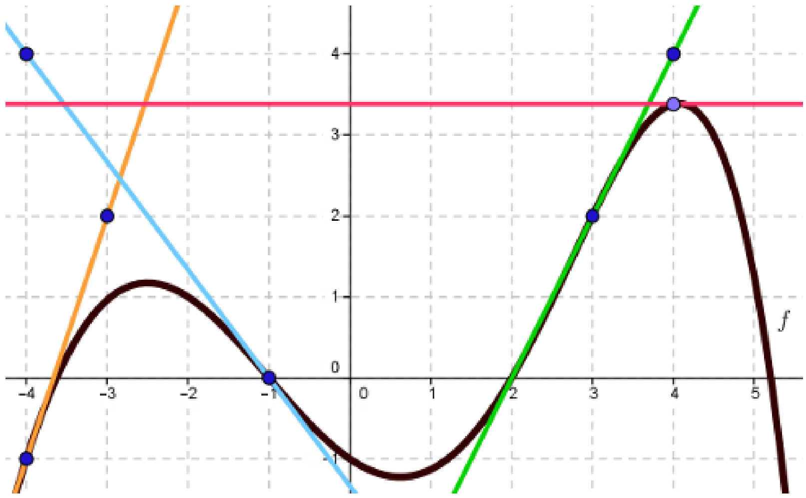
corrigé en vidéo

Exercice ❸
Liam a tracé ci-contre la représentation graphique d'une fonction f et sa tangente au point A d'abscisse 1.

1) En utilisant les coordonnées de deux points, déterminer le coefficient directeur de cette tangente.
2) Quel nombre dérivé peut-on en déduire ?



Exercice ❹
On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, représentée par sa courbe $\mathscr{C}$ en noire ci-dessous.
On a également tracé les tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses -4, -1, 3 et 4.
Déterminer graphiquement $f(-4)$, $f'(-4)$, $f(-1)$, $f'(-1)$, $f(4)$ et $f'(4)$.



Propriété. *Tangente à une courbe*

La tangente à la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f en x_A est la droite qui a pour équation $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$.

Méthode pour déterminer l'équation réduite d'une tangente à une courbe en un point

Soit f la fonction définie sur R par f(x) = x². Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3.

D'après la propriété, l'équation de cette tangente est de la forme $y = f'(x_A)(x - x_A) + f(x_A)$.
Or $f'(x_A) = f'(3) = 6$ et $f(x_A) = f(3) = 9$; alors $y = 6(x-3) + 9 = 6x - 18 + 9 = 6x - 9$.
Donc **l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 est $y = 6x - 9$** .

<u>Autre méthode</u> : L'équation d'une droite est de la forme $y = mx + p$ où m est le coefficient directeur de la droite et p l'ordonnée à l'origine.

Ici $m = f'(3) = 6$; donc la droite a pour équation $y = 6x + p$.

Cherchons p : on sait que la tangente passe par $A(3\ ;\ 9)$; alors $y_A = 6x_A + p$, c'est-à-dire $9 = 6 \times 3 + p$ ou encore $9 = 18 + p$.

$9 = 18 + p$ équivaut à $9 - 18 = 18 + p - 18$, c'est-à-dire à $-9 = p$

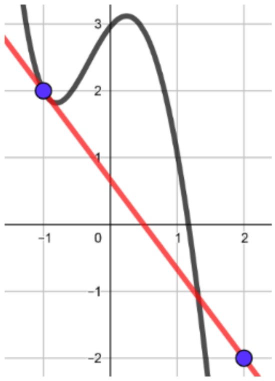
Par conséquent, **l'équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse 3 est $y = 6x - 9$**.

Exercice ❺

On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, représentée par sa courbe $\mathscr{C}$ en noire ci-dessous.

On a également tracé en rouge la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe de f au point d'abscisse -1.

À l'aide du graphique, déterminer $f'(-1)$ puis une équation de cette tangente $\mathscr{T}$.



corrigé en vidéo

Exercice ❻

La courbe d'une fonction g admet une tangente au point d'abscisse -1 d'équation $y = -2x + 1$

Déterminer $g(-1)$ et $g'(-1)$.

Exercice ❼

Une entreprise fabrique et commercialise des cahiers de 96 pages de dimensions 24x32 cm.

On note x le nombre de cahiers produits et $C(x)$ le coût de production, en euro, de ces x cahiers.

Un audit de l'entreprise a permis d'estimer que $C(x) = 3 \times 10^{-9} \times x^3 - 5{,}1 \times 10^{-5} \times x^2 + 2{,}1x$.

1) a) Calculer le coût de production de 10 000 cahiers.
   b) En déduire le coût moyen de production d'un seul cahier sur cette production de 10 000 cahiers.

2) On appelle coût marginal de x cahiers produits la différence $C(x+1) - C(x)$.

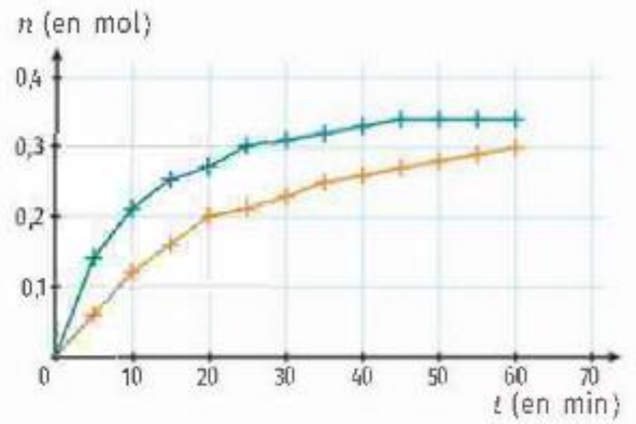
Parmi les choix suivants, quel est celui qui interprète le mieux le co0t marginal ?
- le coût de production de x cahiers ;
- le coût de production d'un cahier ;
- la variation du coût de production induite par la production d'un cahier supplémentaire ;
- le bénéfice de l'entreprise.

3) Calculer et interpréter le coût marginal lorsque $x = 10\ 000$.

4) a) Comparer le coût moyen de production obtenu à la question 1) et le coût marginal obtenu à la question 3) pour $x = 10\ 000$.
   b) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Remarque : En économie, le coût marginal de x peut parfois être assimilé au nombre dérivé de C en x.

Exercice ❽
L'eau oxygénée H_2O_2 est utilisé de diverses manières : par les médecins comme antiseptique, par les coiffeurs pour décolorer les cheveux ou encore par l'industrie pour blanchir le papier par exemple.
L'eau oxygénée se décompose naturellement pour former de l'eau H_2O et du dioxygène O_2
On réalise deux expériences : une première en plaçant de l'eau oxygénée seule dans un récipient fermé et une seconde expérience en ajoutant des ions ferriques Fe^{3+} dans le récipient.
Pour chaque expérience, on représente la quantité de matière n de dioxygène qui s'est formé, en mol, en fonction du temps, en minute, sur du papier millimétré.
Les croix bleues correspondent à l'expérience en présence de fer tandis que les croix orange correspondent à l'expérience sans fer.



On admet que le coefficient directeur de la tangente en un instant donné permet de quantifier la vitesse de réaction en mol/min.
1) Quelle réaction atteint 0,3 mol de dioxygène en premier ?
2) En chimie, un catalyseur est une espèce chimique qui n'est pas consommé au cours de la réaction mais qui joue le rôle d'accélérateur. Quelle espèce chimique est le catalyseur dans cet exercice ?
3) a) Déterminer graphiquement la vitesse des deux réactions au temps t = 5 min et au temps t = 40 min.
   b) Comparer les vitesses de réaction obtenues en t = 5 pour chacune des réactions. Est-ce cohérent avec la question 3) a) ?

Exercice ❾
Une entreprise fabrique des articles de sport. Le coût total de fabrication, en euros, est modélisé par une fonction C dont la courbe représentative est donnée ci-contre.
La tangente à cette courbe au point $A(200\ ;\ 880)$ passe par le point $B(0\ ;\ 600)$.
On appelle coût marginal au rang 200 le coût engendré par la fabrication du 201^e^ article.
Une valeur approchée de ce coût est donnée par le nombre dérivé de la fonction c en 200.
Déterminer graphiquement une valeur approchée du coût marginal au rang 200.